Drs. Sufyani P, M.Ed.

Konsep Dasar
MATEMATIKA

DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ISLAM
KEMENTERIAN AGAMA
REPUBLIK INDONESIA
Tahun 2012

KONSEP DASAR MATEMATIKA
Drs. Sufyani P, M.Ed.

Tata Letak & Cover : Rommy Malchan

Cetakan Ke-1, Desember 2009
Cetakan Ke-2, Juli 2012 (Edisi Revisi)

ISBN, **978-602-7774-27-8**
Ilustrasi Cover : Sumber, http://www.techiemania.com/wp-content/uploads/2011/08/Online-Market-Research.jpg

Pengelola Program Kualifikasi S-1 melalui DMS

Pengarah	:	Direktur Jenderal Pendidikan Islam
Penanggungjawab	:	Direktur Pendidikan Tinggi Islam
Tim Taskforce	:	Prof. Dr. H. Aziz Fahrurrozi, MA.
		Prof.Ahmad Tafsir
		Prof. Dr. H. Maksum Muchtar, MA.
		Prof. Dr. H. Achmad Hufad, M.E.d.
		Dr.s Asep Herry Hemawan, M. Pd.
		Drs. Rusdi Susilana, M. Si.

Alamat :
Subdit Kelembagaaan Direktorat Pendidikan Tingggi Islam
Direktorat Jenderal Pendidikan Islam, Kementerian Agama RI
Lt.8 Jl. Lapangan Banteng Barat Mo. 3-4 Jakarta Pusat 10701
Telp. 021-3853449 Psw.236, Fax. 021-34833981
http://www.pendis.kemenag.go.id/www.diktis.kemenag.go.id
email:kasubditlembagadiktis@kemenag.go.id/
kasi-bin-lbg-ptai@pendis.kemenag.go.id

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim

Program Peningkatan Kualifikasi Sarjana (S1) bagi Guru Madrasah Ibtidaiyah (MI) dan Guru Pendidikan Agama Islam (PAI) pada Sekolah melalui Dual Mode System—selanjutnya ditulis Program DMS—merupakan ikhtiar Direktorat Jenderal Pendidikan Islam Kementerian Agama RI dalam meningkatkan kualifikasi akademik guru-guru dalam jabatan di bawah binaannya. Program ini diselenggarakan sejak tahun 2009 dan masih berlangsung hingga tahun ini, dengan sasaran 10.000 orang guru yang berlatar belakang guru kelas di Madrasah Ibtidaiyah (MI) dan guru Pendidikan Agama Islam (PAI) pada Sekolah.

Program DMS dilatari oleh banyaknya guru-guru di bawah binaan Direktorat Jenderal Pendidikan Islam yang belum berkualifikasi sarjana (S1), baik di daerah perkotaan, terlebih di daerah pelosok pedesaan. Sementara pada saat yang bersamaan, konstitusi pendidikan nasional (UU No. 20 Tahun 2003, UU No. 14 Tahun 2007, dan PP No. 74 Tahun 2008) menetapkan agar sampai tahun 2014 seluruh guru di semua jenjang pendidikan dasar dan menengah harus sudah berkualifikasi minimal sarjana (S1).

Program peningkatan kualifikasi guru termasuk ke dalam agenda prioritas yang harus segera ditangani, seiring dengan program sertifikasi guru yang memprasyaratkan kualifikasi S1. Namun dalam kenyataannya, keberadaan guru-guru tersebut dengan tugas dan tanggungjawabnya tidak mudah untuk meningkatkan kualifikasi akademik secara individual melalui perkuliahan regular. Selain karena faktor biaya mandiri yang relatif membebani guru, juga ada konsekuensi meninggalkan tanggungjawabnya dalam menjalankan proses pembelajaran di kelas.

Dalam situasi demikian, Direktorat Jenderal Pendidikan Islam berupaya melakukan terobosan dalam bentuk Program DMS—sebuah program akselerasi (*crash program*) di jenjang pendidikan tinggi yang memungkinkan guru-guru sebagai peserta program dapat meningkatkan kualifikasi akademiknya melalui dua sistem pembelajaran, yaitu pembelajaran tatap muka (TM) dan pembelajaran mandiri (BM). Untuk BM inilah proses pembelajaran memanfaatkan media modular dan perangkat pembelajaran online *(e-learning).*

Buku yang ada di hadapan Saudara merupakan modul bahan pembelajaran untuk mensupport program DMS ini. Jumlah total keseluruhan modul ini adalah 53 judul. Modul edisi tahun 2012 adalah modul edisi revisi atas modul yang diterbitkan pada tahun 2009. Revisi dilakukan atas dasar hasil evaluasi dan masukan dari beberapa LPTK yang mengeluhkan kondisi modul yang ada, baik dari sisi content maupun fisik. Proses revisi dilakukan dengan melibatkan para pakar/ahli yang tersebar di LPTK se-Indonesia, dan selanjutya hasil review diserahkan kepada penulis untuk selanjutnya dilakukan perbaikan. Dengan keberadaan modul ini, para pendidik yang saat ini sedang menjadi mahasiswa agar membaca dan mempelajarinya, begitu pula bagi para dosen yang mengampunya.

Pendek kata, kami mengharapkan agar buku ini mampu memberikan informasi yang dibutuhkan secara lengkap. Kami tentu menyadari, sebagai sebuah modul, buku ini masih membutuhkan penyempurnaan dan pendalaman lebih lanjut. Untuk itulah, masukan dan kritik konstruktif dari para pembaca sangat kami harapkan.

Semoga upaya yang telah dilakukan ini mampu menambah makna bagi peningkatan mutu pendidikan Islam di Indonesia, dan tercatat sebagai amal saleh di hadapan Allah swt. Akhirnya, hanya kepada-Nya kita semua memohon petunjuk dan pertolongan agar upaya-upaya kecil kita bernilai guna bagi pembangunan sumberdaya manusia secara nasional dan peningkatan mutu umat Islam di Indonesia. Amin

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Jakarta, Juli 2012

Direktur Pendidikan Tinggi Islam

KEMENTERIAN AGAMA
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN ISLAM
REPUBLIK INDONESIA

Prof. Dr. H. Dede Rosyada, MA

DAFTAR ISI

HIMPUNAN

MODUL 1

HIMPUNAN

PENDAHULUAN

Teori himpunan dikenalkan di sekolah pada tahun 1960-an setelah era Sputnik. Pada tahun 1970-an banyak orang merasa bahwa simbol-simbol yang ada pada teori himpunan ini mengakibatkan kebingungan pada dan anak-anak, maupun orang dewasa, khususnya bagi mereka yang baru mengenalsimbol-simbol itu.

Modul ini merupakan bahan ajar pertama dari mata kuliah konsep dasar matematika. Modul ini terbagi ke dalam dua kegiatan belajar. Kegiatan belajar 1 memuat tentang pengertian himpunan, dan kegiatan belajar 2 memuat tentang operasi dan sifat himpunan. Materi yang dibahas di dalam modul ini merupakan dasar untuk mempelajari materi-materi lain dalam matematika dan bidang kajian lain. Dengan Mengusai materi ini kita akan terbantu dalam mempelajari dan mencerna materi-materi lain, baik yang berhubungan dengan logika matematika, matematika secara umum, maupun materi yang berhubungan dengan kehidupan sehari-hari.

Secara umum, setelah anda menyelesaikan modul ini diharapkan anda mampu memahami teori himpunan dan operasi-oerasinya serta dapat memanfaatkannya dalam menyelesaikan masalah-masalah matematika maupun masalah-masalah di uar matematika. Sedangkan secara khusus setelah anda mempelajari modul ini diharapkan dapat:

1. Menjelaskan pengertian himpunan.
2. Menjelaskan pengertian himpunan bagian.
3. Menjelaskan korespondensi satu-satu.
4. Menjelaskan himpunan-himpunan ekuivalen.
5. Menentukan komplemen suatu himpunan..
6. Menentukan irisan himpunan-himpunan.
7. Menentukan gabungan himpunan-himpunan.
8. Menentukan komplemen suatu himpunan..
9. Menentukan sifat-sifat himpunan.

10. Menggunakan diagram venn untuk menyelesaikan masalah.
11. Menentukan produk kartesius himpunan-himpunan.

Agar Anda berhasil dengan baik dalam mempelajri modul ini, ikutilah petunjuk-petunjuk berikut ini.

1. Bacalah dengan baik pendahuluan modul ini sehingga Anda memahami tujuan mempelajari modul ini dan bagaimana mempelajarinya.
2. Bacalah bagian demi bagian materi yang ada dalam modul ini, kalau perlu tandai kata-kata / kaliamat yang dianggap penting. Ucapkan dalam bahasa sendiri kata/kaliamat yang ditandai tersebut.
3. Pahami pengertian demi pengertian dari isi modul ini dengan mempelajari contoh-contohnya, dengan pemahaman sendiri,dan berdiskusi dengan kawan mahasiswa atau orang lain.
4. Kerjakan soal-soal latihan dalam modul ini tanpa melihat petunjuk penyelesaiannya lebih dulu. Apabila mendapat jalan buntu, barulah Anda melihat petunjuk penyelesaiannya. Jawaban Anda tidak perlu sama dengan petunjuk yang diberikan, karena kadang-kadang banyak cara yang dapat kita lakukan dalam menyelesiakan suatu permasalahan.
5. Kerjakan soal-soal tes formatif untuk mengukur sendiri tingkat penguasaan anda akan isi modul ini.

Sebagai acuan utama penulisan modul ini adalah buku karangan Billstein, Liberskind, dan Lot (1993), *A Problem Solving Approach to Mathematics for School Teachers* dan buku karangan Wheeler, Ruric E. (1992). *Modern Mathematics*. Sedangkan sebagai rujukan tambahan penulisan modul ini adalah buku-buku logika matematika yang banyak beredar di pasaran.

Pengertian Himpunan

Sebuah himpunan adalah kumpulan dari obyek-obyek. Obyek-obyek secara individual dinamakan elemen, unsur, atau anggota dari himpunan itu. Sebagai contoh, setiap huruf adalah sebuah elemen dari himpunan huruf-huruf dalam alfabet. Kita menggunakan kurung kurawal untuk membatasi himpunan yang memuat elemen-elemen itu dan menamai himpunan dengan huruf kapital. Himpunan huruf pada alphabet dapat ditulis sebagai berikut:

S = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}

Urutan penulisan elemen pada himpunan tidak dimasalahkan, tetapi setiap elemen harus dituliskan hanya satu kali. Sebagai contoh, himpunan huruf dalam kata buku dapat ditulis sebagai {b, u, k}, {b, k, u}, {u, b, k}, {k, b, u}, atau {k, u, b}.

Kita memberikan simbol untuk elemen yang menjadi anggota himpunan dengan menggunakan simbol ε. Sebagai contoh b ε S. Kita tahu bahwa 4 bukan anggota S. Keadaan ini dapat kita tuliskan dalam bentuk $4 \notin S$.

Suatu himpunan haruslah menunjukkan sesuatu obyek yang terdefinisi secara sempurna (*well defined*). Sebagai contoh, himpunan warga negara Indonesia di Amerika Serikat, himpunan mahasiswa matematika UPI. Himpunan tidak membicarakan untuk obyek-obyek tidak jelas (tidak terukur) Sebagai contoh, kita tidak dapat menyatakan sebagai himpunan jika obyeknya adalah wanita-wanita cantik karena cantik tidak mempunyai ukuran yang jelas. Bilangan-bilangan besar juga bukan merupakan himpunan, karena bilangan besar tidak jelas ukurannya.

Kita dapat menggunakan himpunan untuk mendefinisikan istilah-istilah dalam matematika. Sebagai contoh, himpunan bilangan asli didefinisikan sebagai
N = {1, 2, 3, 4, . . .}

Kadang-kadang elemen-elemen individual dari suatu himpunan tidak diketahui atau elemen-elemen itu terlalu banyak untuk didaftar. Di dalam kasus ini, elemen-elemennya diindikasikan dengan menggunakan "notasi pembangun himpunan". Himpunan binatang yang dipelihara di kebun binatang bandung dapat ditulis dengan,

Z = {x | x adalah binatang yang dipelihara di kebun binatang Bandung}

Himpunan di atas dibaca " Z adalah himpunan seluruh elemen x sedemikian sehingga x adalah binatang yang dipelihara di kebun binatang Bandung. Garis vertikal di dalam himpunan di atas dibaca "sedemikian sehingga".

Contoh.

Tulislah himpunan-himpunan berikut ini dengan menggunakan notasi pembangun himpunan!

(a) {51, 52, 53, 54, . . ., 498, 499}
(b) {2, 4, 6, 8, 10 . . .}
(c) {1, 3, 7, 9, . . .}
(d) {1^2, 2^2, 3^2, 4^2, . . .}

Penyelesaian

(a) {x | x adalah bilangan asli lebih besar dari 50 dan lebih kecil dari 499}, atau
{x | $50 < x < 500$, x ε N}
(b) {x | x adalah bilangan genap}
atau
{x | $x = 2n$, n ε N}
(c) {x | x adalah bilangan ganjil}
atau
{x | $x = 2n - 1$, n ε N}
(d) {x | x adalah kuadrat bilangan asli}
atau
{x | $x = n^2$, n ε N}

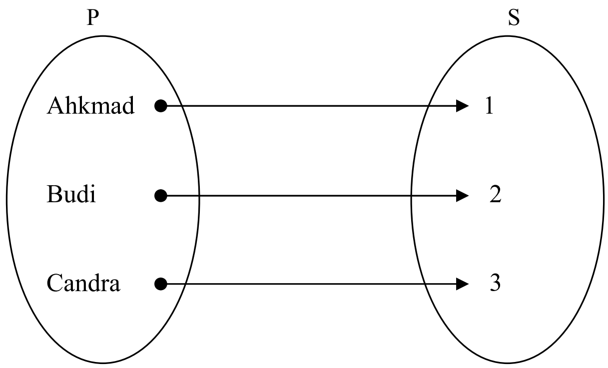
Dua himpunan adalah sama jika dan hanya jika kedua himpunan itu mempunyai tepat elemen yang sama. Urutan penulisan elemen tidak menjadi masalah. Jika A dan B sama, ditulis $A = B$, maka setiap elemen dari A adalah elemen dari B dan setiap elemen dari B adalah elemen dari A. Jika A dan B tidak sama, ditulis $A \neq B$. Perhatikan himpunan-himpunan berikut ini:

D = {1, 2, 3, . . .},
E = {2, 5, 1, . . .},
F = {1, 2, 5, . . .}.

Himpunan D dan E adalah dua himpunan tidak sama, dan himpunan E dan F adalah dua himpunan yang sama.

Korespondensi Satu-satu

Perhatikan himpunan orang P = {Ahmad, Budi, Candra}dan himpunan lintasan kolam renang S = {1, 2, 3}. Misalkan setiap orang dalam P berenang dalam lintasan 1, 2, atau 3 sedemikian sehingga tidak ada dua orang berada pada lintasan yang sama. Pasangan antara orang dan lintasan yang demikian itu adalah suatu korespondensi satu-satu. Salah satu cara untuk menunjukkan korespondensi satu-satu itu adalah Ahmad↔ 1, Budi↔ 2, dan Candra ↔ 3.



Masih ada kemungkinan-kemungkinan lain korespondensi satu-satu antara himpunan P dan himpunan S. Sebagai contoh, semua enam kemungkinan korespondensi satu-satu antara himpunan P dan himpunan S dapat didaftar sebagai berikut:

(1) Ahmad ↔ 1
Budi ↔ 2
Candra ↔ 3
(2) Ahmad ↔ 1
Budi ↔ 3
Candra ↔ 2
(3) Ahmad ↔ 2
Budi ↔ 1
Candra ↔ 3
(4) Ahmad ↔ 2
Budi ↔ 3
Candra ↔ 1
(5) Ahmad ↔ 2
Budi ↔ 1
Candra ↔ 3
(6) Ahmad ↔ 3
Budi ↔ 2
Candra ↔ 1

Definisi

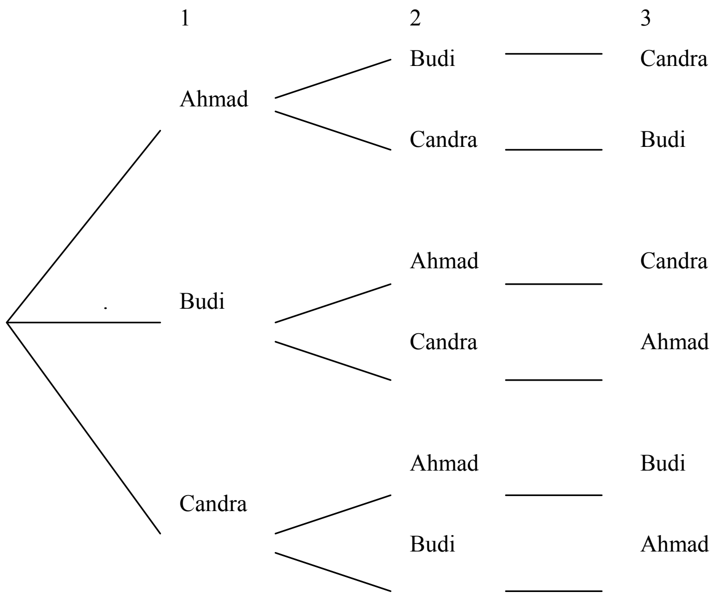
Jika elemen-elemen pada himpunan P dan himpunan S dapat dipasang-pasangkan sedemikian sehingga setiap elemen yang ada pada P terdapat tepat satu elemen yang ada pada S dan setiap elemen yang ada pada S terdapat tepat satu elemen yang ada pada P, maka kedua himpunan P dan S itu dikatakan berkorespondensi satu-satu.

Cara lain untuk menampilkan korespondensi satu-satu adalah dengan menggunakan tabel, dimana bilangan yang menunjukkan lintasan ditulis mendatar pada bagian atas tabel itu dan kemungkinan pasangan-pasangan perenang untuk lintasan ditulis ke bawah, seperti tampak pada tabel berikut:

1	2	3
Ahmad	Budi	Candra
Ahmad	Candra	Budi
Budi	Ahmad	Candra
Budi	Candra	Ahmad
Candra	Ahmad	Budi
Candra	Budi	Ahmad

Diagram pohon juga dapat digunakan untuk mendaftar kemungkinan-kemungkinan korespondensi satu-satu. Untuk membaca diagram pohon itu dan melihat korespondensi satu-satu, ikutilah ranting-rantingnya. Seseorang menempati suatu lintasan tertentu dalam sebuah korespondensi didaftar dibawah bilangan yang menunjukkan lintasan..

Perhatikan diagram pohon berikut.



Ranting paling atas memberikan pasangan (Ahmad, 1), (Budi, 2), dan (Candra, 3). Dari diagram di atas tampak bahwa pada lintasan 1 ada tiga pilihan, kemudian sekali lintasan 1 sudah terisi kita mempunyai dua pilihan untuk lintasan 2 dan selanjutnya kita mempunyai 1 pilihan untuk lintasan 3. Dengan demikian kita mempunyai 3 x 2 x 1 atau 6 buah kemungkinan korespondensi satu.

Coba anda cari ada berapa buah kemungkinan korespondensi satu jika banyak perenangnya 5 dan lintasannya 5?

Himpunan-Himpunan Ekuivalen

Misalkan suatu ruangan memuat 20 buah kursi dan satu siswa duduk pada setiap kursi dan tidak ada yang berdiri. Di sini ada korespondensi satu-satu antara himpunan kursi dan himpunan siswa dalam ruangan itu. Pada kasus ini, himpunan kursi dan himpunan siswa merupakan himpunan-himpunan ekuivalen.

Dua buah himpunan A dan B dikatakan ekuivalen jika dan hanya jika ada korespondensi satu-satu antara himpunan-himpunan itu.

Istilah ekuivalen tidak boleh dikacaukan dengan istilah sama.

Contoh
Perhatikan himpunan-himpunan berikut:
A = {p, q, r, s}
B = {a, b, c}
C = {x, y, z}
D = {b, a, c}

Bandingkan himpunan-himpunan itu dengan menggunakan istilah "sama" dan "ekuivalen"

Penyelesaian:
Himpunan A dan himpunan B tidak ekuivalen dan tidak sama.
Himpunan A dan himpunan C tidak ekuivalen dan idak sama.
Himpunan A dan himpunan D tidak sama dan tidak ekuivalen.
Himpunan B dan himpunan C ekuivalen tetapi tidak sama.
Himpunan B dan himpunan D ekuivalen dan sama.
Himpunan C dan himpunan D ekuivalen tetapi tidak sama.

Bilangan Kardinal
Perhatikan himpunan-himpunan berikut:
{a, b}, {1, 2} , {x, y} , {b, a} , dan {n, m}

Kelima himpunan-himpunan itu ekuivalen satu sama lain. Himpunan-himpunan itu mempunyai bilangan kardinal sama, yaitu 2. Bilangan kardinal dari himpunan X, dinotasikan dengan n(X), mengindikasikan banyak elemen dalam himpunan X. Jika bilangan kardinal dari himpunan D adalah 2, kita tulis n(D) = 2.

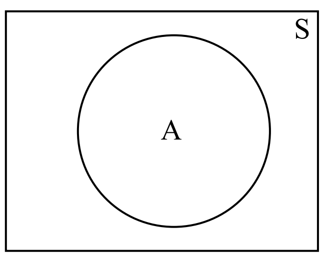
Jika himpunan A ekuivalen atau sama dengan himpunan B maka A dan B mempunyai bilangan kardinal sama. Jika n(A) = n(B) maka A dan B ekuivalen, tetapi A dan B belum tentu sama.

Suatu himpunan adalah himpunan berhingga jika banyak elemen dalam himpunan itu nol suatu bilangan asli. Sebagai contoh himpunan huruf pada alphabet adalah himpunan berhingga karena banyak elemennya tepat 26. Himpunan bilangan asli merupakan himpunan tak berhingga.

Suatu himpunan yang tidak memuat elemen mempunyai bilangan kardinal 0 dan disebut himpunan kosong. Himpunan kosong dinyatakan dengan simbol q atau { }.

Contoh himpunan kosong:
(1) C ={x | x adalah propinsi ke 50 di Indonesia pada tahun 2008 }
(2) D = {x | x adalah bilangan asli kurang dari 1}

Himpunan semesta dinotasikan dengan S adalah himpunan yang memuat seluruh elemen yang menjadi perhatian kita. Misalkan S = {x | x adalah orang yang tinggal di Bandung}dan A = {x | x adalah wanita yang tinggal di Bandung}.Himpunan semesta S dan himpunan A dapat dinyatakan dengan menggunakan diagram. Himpunan semesta biasanya diindikasikan dengan gambar persegipanjang besar dan himpunan-himpunan khususnya dinyatakan dengan lingkaran yang berada di dalam persegipanjang itu. Berikut ini contoh diagram untuk himpunan S dan himpunan A. Diagram ini disebut diagram venn.



Elemen-elemen di dalam S tetapi di luar A dinamakan komplemen dari A.

Komplemen suatu himpunan A, ditulis $\overline{A}$, adalah himpunan semua elemen di dalam himpunan semesta S tetapi tidak dalam A. $\overline{A} = \{x \mid x \varepsilon S \text{ dan } x \notin A\}$

Contoh.

(a) Jika S = {a, b, c, d} dan B = {c, d} Tentukan: (i) $\overline{B}$,(ii) $\overline{S}$, dan (iii) $\overline{\text{q}}$

(b) Jika S = {x | x adalah hewan yang dipelihara di kebun binatang} dan

A = {x | x adalah kijang di kebun binatang}, Tentukan $\overline{A}$.

Penyelesaian.

(a) (i) $\overline{B}$ = {a b}, (ii) $\overline{S}$ = $\overline{\text{q}}$, dan (iii) $\overline{\text{q}}$ = S

(b) Karena hewan secara individual tidak diketahui, $\overline{A}$ harus dinyatakan dengan notasi pembangun himpunan.

$\overline{A}$ = {x | x adalah hewan yang dipelihara di kebun binatang yang bukan kijang}

Himpunan Bagian

Misalkan himpunan A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} dan B = {2, 4, 6}. Semua elemen di B termuat di A, dan B adalah himpunan bagian A. Kita tulis, B $\subseteq$ A. Kita mendefinisikan himpunan bagian sebagai berikut:

B adalah himpunan bagian dari A, ditulis B $\subseteq$ A, jika dan hanya jika setiap elemen pada B adalah elemen pada A.

Definisi ini mengikutsertakan B sama dengan A. Maksud enggunaan frasa “jika dan hanya jika” adalah jika B himpunan bagian dari A maka setiap elemen pada B adalah elemen pada A, dan jika setiap elemen pada B adalah elemen pada A maka B himpunan bagian dari A. Selanjutnya, B $\subseteq$ A dan A $\subseteq$ B jika dan hanya jika A = B.

Jika B adalah himpunan bagian dari A dan B tidak sama dengan A, maka B adalah himpunan bagian murni dari A, ditulis B $\subset$ A. Hal ini maksudnya adalah bahwa setiap elemen pada B termuat di A dan terdapat paling sedikit satu elemen pada A tidak terdapat pada B.

Contoh.
Diberikan himpunan-himpunan S = {1, 2, 3, 4, 5}, D = {1, 3, 5}, dan E = {1, 3}
(a) Himpunan mana merupakan himpunan bagian dari himpunan yang lainnya?
(b) Himpunan mana merupakan himpunan bagian murni dari himpunan yang lainnya?

Penyelesaian.
(a) D $\subseteq$ S, E $\subseteq$ S, E $\subseteq$ D, D $\subseteq$ D, E $\subseteq$ E, dan S $\subseteq$ S.

(b) $D \subset S$, $E \subset S$, dan $E \subset D$.
Misalkan $A \subset B$. Kita dapat menyimpulkan bahwa $A \subseteq B$, (mengapa?)
Jika $A \subseteq B$ tidak berarti harus mengakibatkan $A \subset B$.

Jika sebuah himpunan A adalah bukan himpunan bagian dari B, kita tulis $A \not\subset B$. Untuk menunjukkan bahwa $A \not\subset B$, kita harus menemukan paling sedikit satu elemen pada A tetapi tidak ada pada B. Jika A = {1, 3, 5} dan B = {1, 2, 3} maka A adalah bukan himpunan bagian dari B karena ada 5 yang merupakan elemen pada A tetapi bukan elemen pada B. Begitu juga dengan sebaliknya, B adalah bukan himpunan bagian dari A karena ada 2 yang merupakan elemen pada B tetapi bukan elemen pada A.

Menjelaskan hubungan antara himpunan kosong dan himpunan bagian adalah bukan hal yang mudah, karena tidak ada elem pada himpunan kosong adalah elemen pada himpunan lainnya. Untuk menyelidiki masalah ini kita akan menggunakan penalaran tak langsung dan memperhatikaan sebuah kasus khusus.

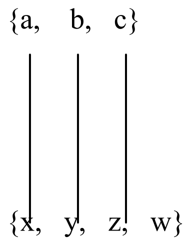
Misalkan terdapat himpunan {1, 2}. Apakah q $\subseteq$ {1, 2}atau q $\not\subset$ {1, 2}? Andaikan q $\not\subset$ {1, 2}.

Terdapat suatu elemen pada q yang tidak terdapat pada {1, 2}. Karena q tidak mempunyai elemen, mengakibatkan tidak ada elemen pada himpunan kosong yang tidak terdapat pada {1, 2}. Konsekwensinya, q $\not\subset$ {1, 2} adalah salah. Dengan demikian haruslah q $\subseteq$ {1, 2}. Cara yang sama dapat kita tunjukkan untuk melihat himpunan kosong dengan himpunan-himpunan lainnya. Secara khusus kita dapat mencatat bahwa himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari dirinya dan merupakan himpunan bagian murni dari himpunan-himpunan lainnya.

Himpunan bagian dengan elemen suatu himpunan sering kali membingungkan. Kita katakan bahwa 2 ε {1, 2}, tetapi karena 2 bukan suatu himpunan, kita tidak dapat menggantikan simbol $\subset$ untuk simbol ε. Meskipun demikian, { 2 } $\subset$ {1, 2}. Sebaliknya, simbol ε tidak dapat kita gunakan { 2 } sebagai himpunan bagian dari {1, 2}.

Ketidaksamaan

Pengertian himpunan bagian murni dapat digunakan untuk mendefinisikan konsep "kurang dari atau lebih kecil dari" diantara beberapa bilangan-bilangan asli. Himpunan {a, b, c} mempunyai banyak elemen kurang dari banyak elemen pada himpunan {x, y, z, w} karena jika kita coba untuk memasangkan satu-satu dari dua himpunan tersebut, kita dapat mempeoleh seperti berikut:



Kita lihat bahwa ada sebuah elemen dari himpunan ke dua yang tidak terpasangkan. Himpunan {a, b, c} adalah ekuivalen dengan suatu himpunan bagian murni dari {x, y, z, w}. Secara umum, A dan B himpunan-himpunan berhingga, A kurang dari B, atau $n(A) < n(B)$, jika A adalah ekuivalen dengan himpunan bagian murni dari B. Hal ini membawa kita untuk membangun definisi "kurang dari" untuk bilangan-bilangan asli.

Untuk bilangan-bilangan asli a dan b, a adalah kurang dari b, ditulis $a < b$ jika dan hanya jika untuk himpunan-himpunan A dan B dengan $n(A) = a$ dan $n(B) = b$, terdapat himpunan bagian murni B ekuivalen dengan A.

Kita katakan bahwa a lebih besar dari b, ditulis $a > b$, jika dan hanya jika $b < a$.

Contoh Masalah

Suatu majlis hakim yang akan memutuskan suatu perkara pemilu terdiri dari 4 orang, yaitu A, B, C, dan D. Untuk memutuskan perkara itu digunakan mayoritas sederhana dan setiap anggota majlis mempunyai hak suara satu. Jika banyak suara yang setuju dan yang menolak sama maka dilakukan pemungutan ulang. Tentukan berapa banyak cara untuk mengambil keputusan setuju?

Memahami masalah.

Banyak hakim yang ada pada majlis itu 4 orang. Untuk memutuskan perkara itu digunakan mayoritas sederhana. Akan dicari banyak cara untuk mengambil keputusan setuju.

Merencanakan Strategi Penyelesaian.

Untuk menyelesaikan masalah itu kita akan menggunakan daftar himpunan bagian dari himpunan majlis hakim. Untuk mengambil keputusan setuju perlu paling sedikit diperlukan 3 orang. Setiap himpunan bagian yang mempunyai elemen setuju 3 atau 4 akan memenangi suara setuju.

Menjalankan Strategi Penyelesaian

Untuk menyelesaikan masalah ini, kita harus menemukan semua himpunan bagian dari himpunan A = {a, b, c, d}yang mempunyai paling sedikit 3 elemen.

Seluruh himpunan bagian itu dapat ninyatakan dengan menggunakan tabel sebagai berikut:

q	{ A }	{ B }	{ C }	{ D }	
{ A, B }	{ A, C }	{ A, D }	{ B, C }	{ B, D}	{C, D}
{ A, B, C }	{ A, B, D }	{ A, C, D }	{ B, C, D }		
{ A, B, C, D }					

Peninjauan Ulang

Kita telah mengetahui ada 5 kemungkinan cara (komposisi) majlis menyetujui keputusan. Kita masih dapat menentukan penyelesaian masalah ini tanpa mengggunakan tabel. (Coba cari cara lain itu!)

Pertanyaaan lain yang mungkin muncul adalah:

Berapa banyak kemungkinan terjadi jika banyak hakimnya itu hanya1 orang? 2 orang? 3 orang? Dan seterusnya.

Jika B = { a } maka B mempunyai 2 himpunan bagian, yaitu q dan { a }.
Jika C = = { a, b } maka C mempunyai 4 himpunan bagian, yaitu q dan {a},{b }, dan { a, b }.
Jika D = = { a, b, c } maka D mempunyai 8 himpunan bagian, yaitu q dan {a}, {b }, {c },{ a, b }, { a, c }, { b, c }, { a, b, c }.

Dengan menggunakan informasi dari kaus-kasus di atas, kita dapat membuat tabel untuk mencari suatu pola sebagaimana tampak pada tabel berikut ini:

Banyak Elemen	Banyak Himpunan Bagian
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
.	.

.	.
.	.

Tabel di atas membawa kita untuk menyatakan bahwa banyak himpunan bagian yang mempunyai 4 elemen adalah 16 = 2^4 (Apakah dugaan ini benar?), sehingga kita mempunyai fumus umum bahwa banyak himpunan bagian dari himpunan yang mempunyai n buah elemen adalah 2^n.

Latihan 1

Untuk meningkatkan pemahaman anda pada materi kegiatan belajar ini, coba Anda kerjakan soal-soal berikut ini.

1. Tentukan apakah yang berikut ini dapat dibentuk suatu himpunan atau tidak, dan mengapa?
   a. Kumpulan buku-buku besar.
   b. Kumpulan guru-guru MI.
2. Tulislah himpunan berikut dengan cara mendaftar anggota-anggotanya atau dengan notasi pembentuk himpunan.
   a. Himpunan huruf dalam kata "matematika"
   b. Himpunan bilangan asli lebih dari 20.
3. Misalkan D dan E adalah himpunan-himpunan. Tuliskan kembali dengan simbol matematika!
   a. B sama dengan himpunan yang mempunyai elemen x, y, dan z.
   b. Himpunan D adalah bukan himpunan bagian dari E.
4. Misalkan A dan B himpunan-himpunan. Tunjukkan seluruh kemungkinan korespondensi satu-satu dari himpunan A dan dan humpunan B, jika A = { b, c }dan B = { 1, 2 }.
5. Misalkan C adalah himpunan bagian dari D dan D adalah himpunan bagian dari C.
   a. Jika n(C) = 5, Tentukan n(D).
   b. Carilah hubungan lain antara C dan D.

Petunjuk Jawaban Latihan 1

1. Ingat masalah terdefinisi secara sempurna (*well defined*). Apakah buku besar itu mempunyai kriteria yang jelas? Apakah guru MI itu kriiterianya jelas?
2. Untuk bagian (a) ingat bahwa elemen yang sama pada suatu himpunan ditulis hanya satu kali, dan untuk bagian (b) ingat apakah himpunan ini berhingga atau tak berhingga? Ingat pula penulisan himpunan dengan tanda kurung kurawal dan garis

vertikal.

3. Untuk bagian (a) sudah jelas. Untuk bagian (b) anda harus hati-hati terhadap penulisan lambang anggta himpunan dan himpunan bagian suatu himpunan. .
4. Akan lebih mudah jika anda membuat terlebih dahulu diagramnya atau bagannya.
5. Ingat tentang kesamaan dan ekuivalensi dua buah himpunan.

Rangkuman

1. Sebuah himpunan adalah kumpulan dari obyek-obyek. Obyek-obyek secara individual dinamakan elemen, unsur, atau anggota dari himpunan itu.
2. Simbol untuk elemen yang menjadi anggota himpunan adalah ε..dan jika bukan elemen adalah $\notin$.
3. Kurung kurawal digunakan untuk membatasi himpunan yang memuat elemen-elemen itu dan menamai himpunan dengan huruf kapital.
4. Himpunan dapat dituliskan dengan mendaftar seluruh elemennya dengan elemen yang sama dituliskan hanya satu kali, atau dengan menggunakan "notasi pembangun himpunan".
5. Jika elemen-elemen pada himpunan P dan himpunan S dapat dipasang-pasangkan sedemikian sehingga setiap elemen yang ada pada P terdapat tepat satu elemen yang ada pada S dan setiap elemen yang ada pada S terdapat tepat satu elemen yang ada pada P, maka kedua himpunan P dan S itu dikatakan berkorespondensi satu-satu.
6. Dua buah himpunan A dan B dikatakan ekuivalen jika dan hanya jika ada korespondensi satu-satu antara himpunan-himpunan itu.
7. Bilangan kardinal dari himpunan X, dinotasikan dengan n(X), mengindikasikan banyak elemen dalam himpunan X.
8. Suatu himpunan adalah himpunan berhingga jika banyak elemen dalam himpunan itu nol suatu bilangan asli.
9. Suatu himpunan yang tidak memuat elemen mempunyai bilangan kardinal 0 dan disebut himpunan kosong. Himpunan kosong dinyatakan dengan simbol q atau { }.
10. Himpunan semesta dinotasikan dengan S adalah himpunan yang memuat seluruh elemen yang menjadi perhatian kita. Misalkan S = {x | x adalah orang yang tinggal di Bandung}dan A = {x | x adalah wanita yang tinggal di Bandung}.Himpunan semesta S dan himpunan A dapat dinyatakan dengan menggunakan diagram.
11. Komplemen suatu himpunan F, ditulis $\overline{F}$, adalah himpunan semua elemen di dalam himpunan semesta S tetapi tidak dalam F. $\overline{F}$ = {x | x ε S dan x $\notin$ F}
12. B adalah himpunan bagian dari A, ditulis B $\subseteq$ A, jika dan hanya jika setiap elemen pada B adalah elemen pada A.
13. Misalkan a dan b bilangan-bilangan asli. a adalah kurang dari b, ditulis $a < b$ jika dan hanya jika untuk himpunan-himpunan A dan B dengan $n(A) = a$ dan $n(B) = b$, terdapat himpunan bagian murni B ekuivalen dengan A. a lebih besar dari b, ditulis $a > b$, jika dan hanya jika $b < a$.

Tes Formatif 1

Petunjuk: Pilihlah salah satu jawaban yang dianggap paling tepat !

1. Diantara kumpulan berikut, kumpulan yang dapat dinyatakan sebagai himpunan adalah
   a. Bilangan besar.
   b. Bilangan asli kurang dari 1
   c. Benda-benda ringan.
   d. Gambar-gambar indah.

2. Misalkan A adalah himpunan yang terbentuk oleh huruf pada kata "mississippi" . Banyak elemen pada A adalah
   a. 1
   b. 2
   c. 4
   d. 11

3. Misalkan D dan E adalah himpunan-himpunan. Penulisan secara simbol dari " D bukan himpunan bagian murni dari E" adalah
   a. $D \notin E$
   b. $\{D\} \notin \{E\}$
   c. $D \not\subset E$
   d. $\{D\} \not\subset \{E\}$

4. Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan. A mempunyai 4 elemen dan B mempunyai 4 elemen Banyak kemungkinan korespondensi satu-satu antara A dan B adalah
   a. 24
   b. 16
   c. 12
   d. 8

5. Diketahui himpunan-himpunan berikut:
   $P = \{1,2,3\}$, $Q = \{0, 1, 2\}$, $R = \{2, 3, 1\}$, $S = \{p, q, r\}$
   Dari himpunan-himpunan tersebut yang equivalen adalah
   a. P, Q, dan R
   b. P dan Q
   c. P dan R
   d. P, Q, R, dan S.

6. Misalkan A, B, C, D, E, dan F adalah himpunan-himpunan, dimana A = {1,2,3}, B = {0, 1, 2}, C = {0}, D = q , E = { }, dan F = {q }
   Dari himpunan-himpunan tersebut yang sama adalah
   a. A dan B
   b. C dan E
   c. C dan F
   d. D dan E

7. Misalkan B adalah himpunan bagian dari C.
   Jika n(C) = 8 maka banyak elemen B maksimum adalah
   a. 0
   b. 1
   c. 7
   d. 8

8. Lambang yang cocok agar pernyataan {1}....... {0, 1, 2} benar adalah
   a. $<$
   b. $\leq$
   c. $\in$
   d. $\subset$

9. Misalkan A dan B himpunan-himpunan. Pernyataan berikut yang benar adalah
   a. Jika $A \subseteq B$ maka $A = B$
   b. Jika $A = B$ maka $A \subseteq B$
   c. Jika $A \neq B$ maka $A \subseteq B$.
   d. Jika $A \subseteq B$ maka $A \neq B$.

10. Jika A = {a, b, c, d, e} maka banyak himpunan bagian murni dari A adalah
    a. 32
    b. 16
    c. 8
    d. 31

Balikan dan Tindak Lanjut

Cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir bahan ajar mandiri ini. Hitunglah jawaban Anda yang benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar .

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 % - 100 %	=	baik sekali
80 % - 89 %	=	baik
70 % - 79 %	=	cukup
< 70 %	=	kurang

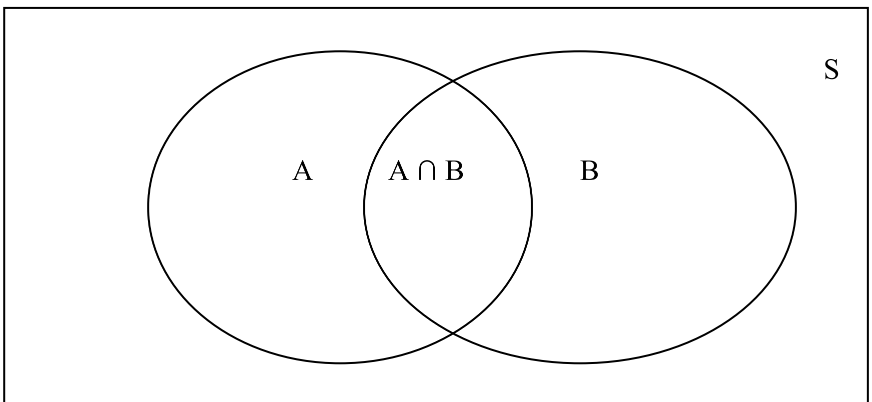
Kalau tingkat penguasaan Anda di atas 80 %, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80 %, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

Operasi dan Sifat Himpunan

Pada kegiatan belajar 1 kita telah menyinggung sedikit tentang operasi himpunan, ksusunya tentang komplemen suatu himpunan. Pada kegiatan belajar 2 ini operasi himpunan yang kita bahas lebih luas lagi, seperti irisan himpunan, gabungan himpunan, selisih himpunan, serta sifat-sifat operasi himpunan. Pada kegiatan belajar ini, kita juga akan membahas diagram Venn dan produk kartesius.

Irisan Himpunan

Misalkan sebuah sekolah akan membentuk kelompok-kelompok kegiatan olahraga beladiri. Sekolah menawarkan dua jenis cabang olahraga bela diri untuk diikuti oleh siswanya, yaitu karate dan silat. Untuk itu guru olahraga mengidentifikasi pilihan jenis olahraga beladiri para siswanya. Jika A dan B adalah berurut-turut himpunan siswa memilih karate dan himpunan siswa memilih silat, maka ada beberapa siswa memilih kedua jenis olahraga beladiri itu., atau irisan A dan B. Irisan himpunan A dan himpunan B dapat dinyatakan dalam gambar seperti berikut.



$A \cap B$

Definisi:

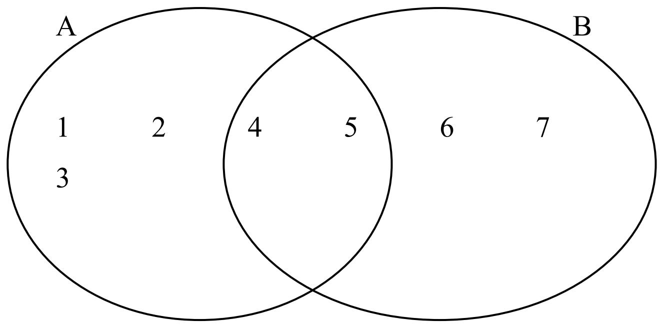
Irisan dua himpunan A dan B, ditulis A ∩ B, adalah himpunan semua elemen sekutu untuk A dan B. $A \cap B = \{x \mid x \varepsilon A \text{ dan } x \varepsilon B\}$.

Kata kunci pada definisi irisan ini adalah **dan,** dan mengimplikasikan kedua kondisi harus harus dipertemukan.

Jika himpunan A dan B tidak mempunyai elemen sekutu, maka kita katakan bahwa kedua himpunan itu saling lepas (disjoint sets). Dengan kata lain, dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas jika dan hanya jika A ∩ B = { }. Sebagai contoh himpunan siswa pria yang memilih silat dan himpunan siswa wanita yang memilih silat adalah saling lepas.

Contoh.

1. Misalkan A dan B himpunan-himpunan.
   Jika A = {1, 2, 3, 4, 5}dan B = {4, 5, 6, 7}, Tentukan A ∩ B. Masalah ini dapat pula disajikan dalam gambar sebagai berikut:



   Dari gambar di atas tampak bahwa elemen A yang merupakan elemen B adalah {4, 5 }. Dengan demikian,

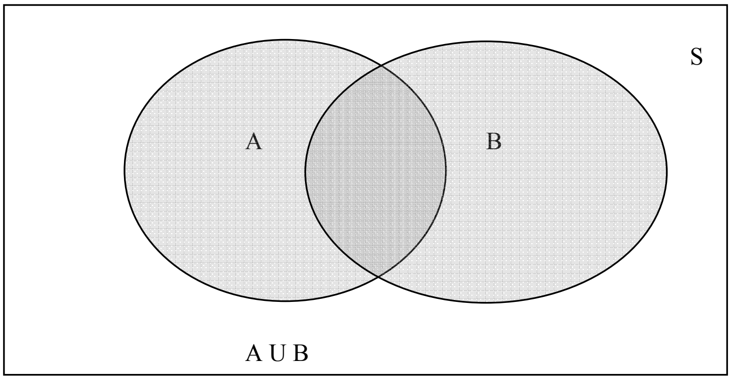
$$A \cap B = \{4, 5\}$$

2. Misalkan P dan Q adalah himpunan-himpunan.
   Jika P = {x | x bilangan genap} dan Q = {x | x bilangan prima}, tentukan P ∩ Q .
   Penyelesaian.
   Karena P adalah himpunan bilangan genap dan Q adalah himpunan bilangan prima, kita akan menuliskan P dan Q berturut-turut sebagai berikut:
   P = {2, 4, 6, 8, 10, ...} dan Q = {2, 3, 5, 7, 11, 13, ...}
   Dari cara penulisan di atas tampak bahwa elemen A yang merupakan elemen B adalah { 2 }. Dengan demikian,

$$A \cap B = \{2\}$$

Gabungan Himpunan

Jika A adalah berurut-turut himpunan siswa memilih karate dan B adalah himpunan siswa memilih silat, maka himpunan siswa yang memilih karateka atau silat atau keduanya adalah gabungan himpunan A dan himpunan B. Gabungan himpunan A dan B dapat dinyatakan secara gambar seperti berikut:



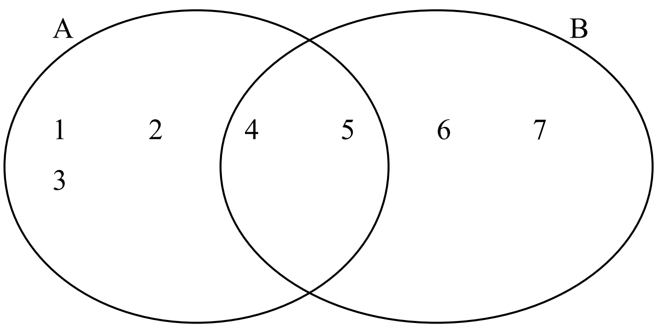
Definisi:
Gabungan dua buah himpunan A dan B, ditulis A U B, adalah himpunan seluruh elemen dalam A atau dalam B.

A U B = {x | x ε A atau x ε B}.

Kata kunci dalam definisi gabungan ini adalah "atau". Dalam matematika, "atau" biasanya dimaksudkan "satu atau lainnya atau kedua-duanya".

Contoh.

1. Misalkan A dan B himpunan-himpunan.
   Jika A = {1, 2, 3, 4, 5}dan B = {4, 5, 6, 7}, Tentukan A U B. Masalah ini dapat pula disajikan dalam gambar sebagai berikut:



Dari gambar di atas tampak bahwa himpunan elemen yang ada pada A, atau B, atau kedua-duanya adalah {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Dengan demikian,

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

2. Misalkan P dan Q adalah himpunan-himpunan.
   Jika P = {x | x bilangan genap} dan Q = {x | x bilangan ganjil},
   tentukan $P \cap Q$.
   Penyelesaian.
   Karena P adalah himpunan bilangan genap dan Q adalah himpunan bilangan ganjil, kita akan menuliskan P dan Q berturut-turut sebagai berikut:
   P = {2, 4, 6, 8, 10, ...} dan Q = {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...}

Dari cara penulisan di atas tampak bahwa himpunan elemen yang ada pada A atau elemen yang ada pada B atau kedua-duanya adalah {1, 2, 3, 4, 5 }. Dengan demikian,

A U B = {1, 2, 3, 4, 5, ... } atau

A U B = {x | x bilangan asli}

Selisih Himpunan

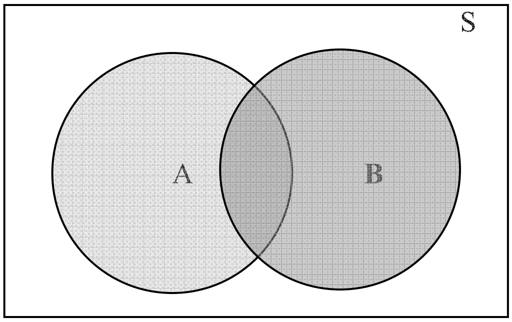
Jika A dan B adalah berurut-turut himpunan siswa memilih karate dan himpunan siswa memilih silat, maka himpunan siswa yang memilih silat tetapi tidak memilih karate dinamakan komplemen A relatif terhadap B.

Definisi.

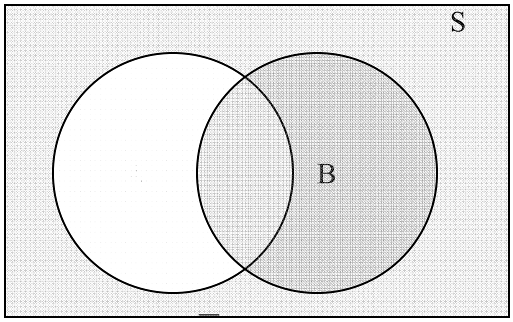
Komplemen A relatif terhadap B, ditulis B – A, adalah himpunan seluruh elemen pada B yang tidak terdapat pada A.

$$B - A = \{x \mid x \in B \text{ dan } x \notin A\}.$$

Melalui diagram Venn kita dapat memperhatikan hubungan antara B – A dan $B \cap \overline{A}$. Perhatikan diagram berikut:



B – A



B $\cap$ $\bar{A}$

Contoh.

Diketahui: S = {a, b, c, d, e, f, g}.
A = {d, e, f}.
B = {a, b, c, d, e}.

Tentukan:

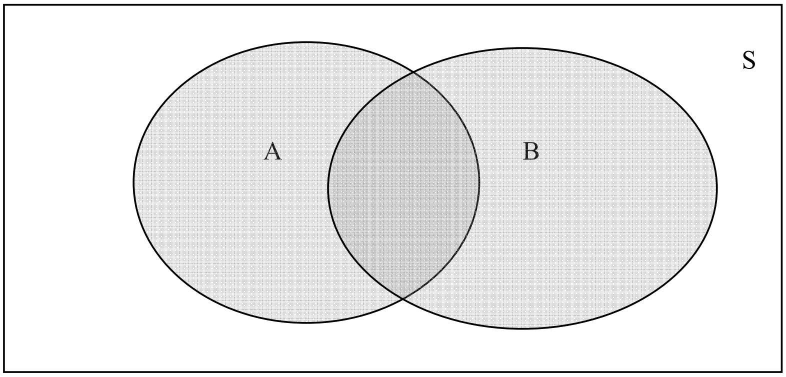
(a) A U B
(b) A $\cap$ B
(c) A – B
(d) B – A
(e) B U A
(f) B $\cap$ A

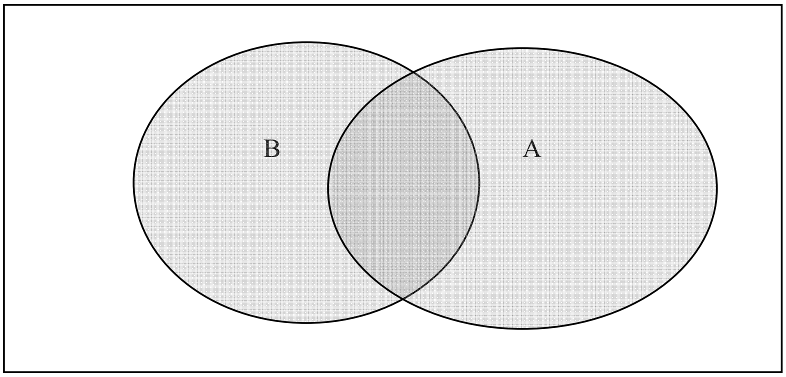
Penyelesaian:

(a) A U B = {a, b, c, d, e, f}.
(b) A $\cap$ B = {d, e}.
(c) A – B = { f }.
(d) B – A = {a, b, c}.
(e) B U A = {a, b, c, d, e, f}.
(f) B $\cap$ A = {d, e}.

Sifat-Sifat Operasi Himpunan

Oerasi-operasi pada himpunan mempunyai beberapa sifat yang menarik untuk diamati. Sebagai langkah awal, perhatikan contoh gambar berikut.

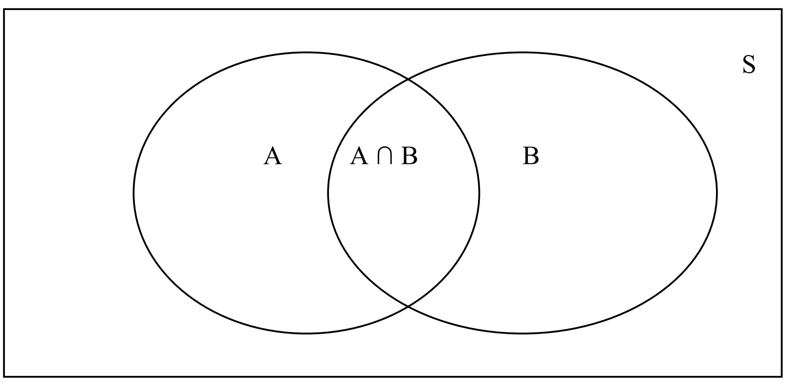




Dari kedua gambar tersebut kita dapat melihat bahwa A U B sama dengan B U A. Hal ini adalah menunjukkan ada sifat komutatif dari gabungan himpunan, karena itu

$$A \cup B = B \cup A.$$

Disamping memiliki sifat komutatif pada operasi gabungan antar himpunan-himpunan, kita memiliki sifat komutatif pada oprasi lainnya. Kita akan melihat sifat komutatif operasi lainnya pada himpunan-himpunan, diantaranya adalah sifat komutatif pada operasi irisan himpunan. Untuk itu marilah kita perhatikan gambar berikut ini.



Dari kedua gambar tersebut kita dapat melihat bahwa A ∩ B sama dengan A ∩ B. Sifat Ini adalah sifat komutatif dari irisan himpunan.

Hal ini adalah menunjukkan ada sifat komutatif dari gabungan himpunan, karena itu

$$A \cap B = A \cap B.$$

Selain kedua sifat di atas, kita akan memperhatikan sifat-sifat lainnya, diantaranya adalah sifat asosiatif pada gabungan himpunan-himpunan. Untuk memahami masalah ini kita perhatikan gambar berikut:

Dari gambar tersebut kita dapat mengamati bahwa ternyata (A U B) U C sama dengan A U (B U C). Hal ini adalah menunjukkan ada sifat asosiatif dari gabungan himpunan, karena

(A U B) U C = A U (B U C)

Contoh.

Diketahui: S = {a, b, c, d, e, f, g}.
A = {a, b, c}.
B = {b, c, d}
C = . {c, d, e}

Tentukan: (a) (A U B) U C
(b) A U (B U C)

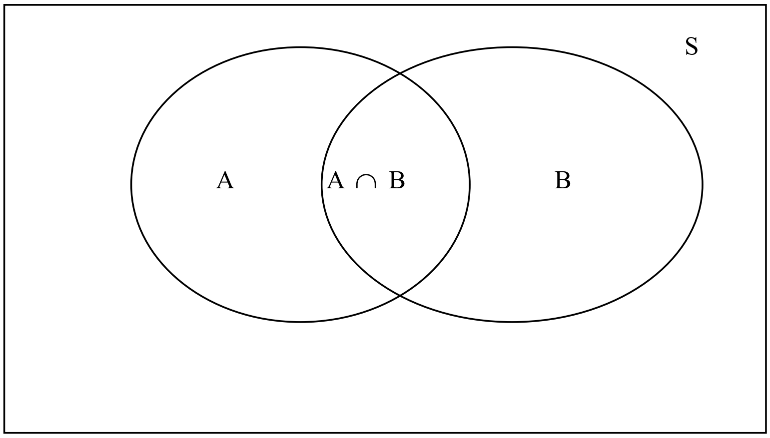
Penyelesaian:

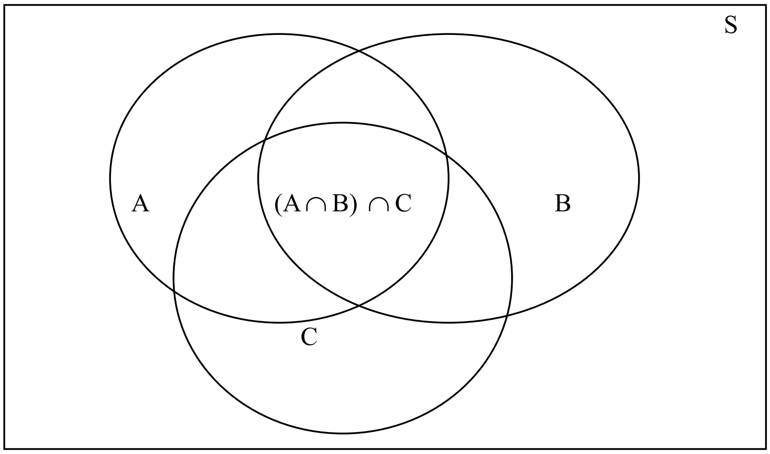
(a) A U B = {a, b, c} U {b, c, d}
= {a, b, c, d}
(A U B) U C = {a, b, c, d} U {c, d, e}
= {a, b, c, d, e}

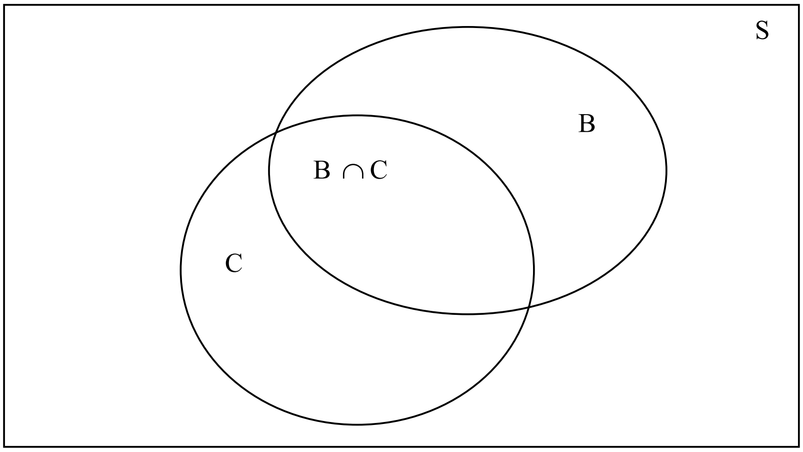
(b) . B U C = {b, c, d} U {c, d, e}
= {b, c, d, e}
A U (B U C) = {a, b, c} U {b, c, d, e}
= {a, b, c, d, e}

Dari contoh di atas jelas bahwa (A U B) U C = A U (B U C).

Selanjutnya, kiat akan meninjau adakah sifat asosiatif pada operasi irisan himpunan-himpunan. Untuk itu perhatikan rangkaian gambar berikut:


S
A
A ∩ B
B


S
A
(A∩B) ∩C
B
C


S
B
B ∩C
C

Dari rangkaian gambar di atas kita dapat mengamati bahwa ternyata $(A \cap B) \cap C$ sama dengan $A \cap (B \cap C)$. Hal ini adalah menunjukkan ada sifat asosiatif dari gabungan himpunan, karena

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Contoh.

Diketahui: S = {a, b, c, d, e, f, g}.
A = {a, b, c}.
B = {b, c, d}
C = . {c, d, e}

Tentukan: (a) $(A \cap B) \cap C$
(b) $A \cap (B \cap C)$.

Penyelesaian:

(a) $A \cap B$ = {a, b, c} $\cap$ {b, c, d}
= {b, c}

$(A \cap B) \cap C$ = {b, c} $\cap$ {c, d, e}
= { c }

(b) $B \cap C$ = {b, c, d} $\cap$ {c, d, e}
= {c, d}

$A \cap (B \cap C)$.= {a, b, c} $\cap$ { c, d }
= { c }

Dari contoh di atas jelas bahwa $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Perhatikan masalah berikut ini!.

Apakah $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$?

Untuk menyelidiki masalah tersebut, kita ambil contoh sebagai berikut:

Misalkan

A = {a, b, c}.

B = {b, c, d}

C = . {c, d, e}

Kita melakukan operasi-operasi pada himpunan itu sebagai berikut:

B U C = {b, c, d}U {c, d, e}
= {b, c, d, e}

$A \cap (B \cup C) = \{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\}$

$= \{b, c\}$

$A \cap B = \{a, b, c\} \cap \{b, c, d\}$

$= \{b, c\}$

$(A \cap B) \cup C = \{b, c\} \cup \{c, d, e\}$

$= \{b, c, d, e\}$

Dari contoh penyangkal itu, kita dapat menerima $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$ atau dengan kata lain $A \cap (B \cup C) \neq (A \cap B) \cup C$

Sifat distributif.
Jika A, B, dan C himpunan-himpunan, maka berlaku:

1. Distributif irisan terhadap gabungan
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. Distributif gabungan terhadap irisan.
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Contoh.
Diketahui himpunan-himpunan berikut:
$A = \{a, b, c\}$.
$B = \{b, c, d\}$
$C = \{c, d, e\}$

Periksalah:

a. Sifat distributif irisan terhadap gabungan pada himpunan-himpunan itu.
b. Sifat distributif gabungan terhadap irisan pada himpunan-himpunan itu.

Penyelesaian.

a. $A \cap (B \cup C) = \{a, b, c\} \cap (\{b, c, d\} \cup \{c, d, e\})$
   $= \{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\}$
   $= \{b, c\}$

   $(A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{a, b, c\} \cap \{b, c, d\}) \cup (\{a, b, c\} \cap \{c, d, e\})$
   $= \{b, c\} \cup \{c\}$
   $= \{b, c\}$

   Jadi, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b. A U (B ∩ C) = {a, b, c}U({b, c, d}∩ {c, d, e})
= {a, b, c}U{c, d }
= {a, b, c, d}

(A U B) ∩ (A U C) = ({a, b, c}U {b, c, d})∩ ({a, b, c} U {c, d, e})
= {a, b, c, d}∩{a, b, c, d, e }
= {a, b, c, d}

Jadi, A U (B ∩ C) = (A U B) ∩ (A U C)

Disamping sifat-sifat yang telah kita bahas di atas, kita masih mempunyai sifat yang lain, yaitu sifat identitas dan sifat komplemen.

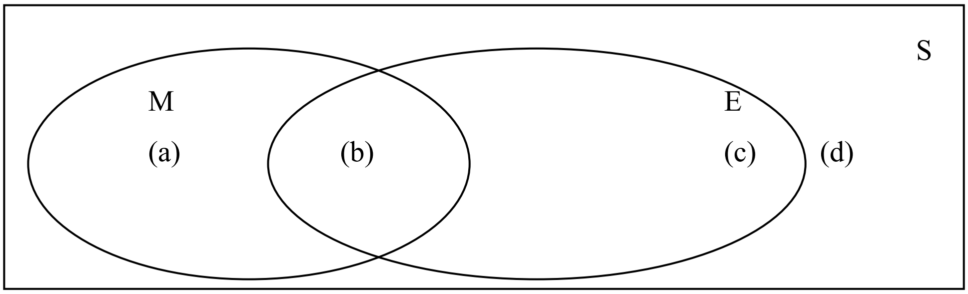
1. Sifat Identitas.
   Untuk setiap himpunan A dan himpunan semesta S, berlaku
   a. A∩S = S ∩A = A S adalah identitas untuk irisan himpunan.
   b. A .U q = q U A = A q adalah identitas untuk gabungan himpunan.
2. Sifat Komplemen
   Untuk setiap himpunan A dan himpunan semesta S, berlaku
   a. $\overline{S}$ = q
   b. $\overline{q}$ = S
   c. A∩ $\overline{A}$ = q
   d. AU $\overline{A}$ = S
   e. $\overline{\overline{A}}$ = A

Penggunaan Diagram Venn sebagai Alat Pemecahan Masalah

Perhatikan contoh-contoh berikut ini!

Contoh 1.

Misalkan M adalah himpunan siswa yang mengambil pelajaran tambahan matematika dan E adalah himpunan siswa yang mengambil pelajaran tambahan bahasa inggris. Identifikasikan siswa-siswa yang digambarkan pada setiap daerah di dalam diagram Venn berikut: (daerah (a), (b), (c), dan (d))



Penyelesaian:

(1) Daerah (a) memuat semua siswa yang mengambil pelajaran tambahan matematika tetapi tidak mengambil pelajaran tambahan bahasa inggris.
(2) Daerah (b) memuat semua siswa yang mengambil pelajaran tambahan matematika sekaligus mengambl pelajaran tambahan bahasa inggris.
(3) Daerah (c) memuat semua siswa yang mengambil pelajaran tambahan bahasa inggris tetapi tidak mengambil pelajaran tambahan matematika.
(4) Daerah (d) memuat semua siswa yang tidak mengambil pelajaran tambahan matematika maupun bahasa inggris.

Contoh 2.

Berdasarkan hasil survey tentang kegemaran olahraga terhadap 110 orang siswa kelas 6 salah satu MI diperoleh informasi sebagai berikut:

25 orang menyukai bulutangkis

45 orang menyukai karate

48 orang menyukai catur

10 orang menyukai bulutangkis dan catur

8 orang menyukai karate dan catur

6 orang menyukai bulutangkis dan karate

5 orang menyukai ketiga jenis olahraga itu.

Perntanyaan:

(1) Berapa orang yang menyukai karate tetapi tidak menyukai bulutangkis maupun catur?
(2) Berapa orang yang tidak menyukai baik bulutangkis, karate, ataupun catur?

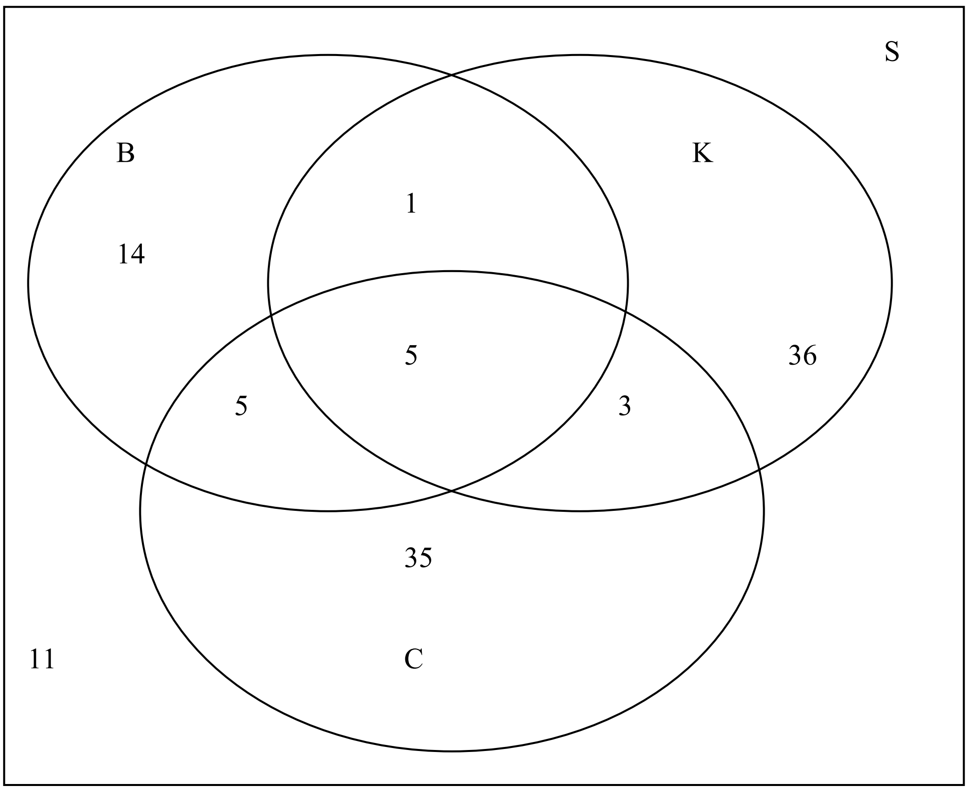
Penyelesaian.

Untuk menyelesaikan masalah ini kita membuat suatu model menggunakan himpunan-himpunan. Karena ada tiga jenis olahraga yang berbeda, kita harus menggunakan tiga buah lingkaran.

Misalkan B adalah himpunan siswa menyukai bulutangkis, K himpunan siswa menyukai karate. dan C himpunan siswa menyukai catur. B mempunyai 25 elemen, K mempunyai 45 elemen, dan C mempunyai 48 elemen.

Jika kita pehatikan irisan-irisan himpunannya, kita akan memperoleh banyaknya elemen yang ada pada irisan-irisan himpunan itu, yaitu: irisan B dan C mempunayi 10 elemen, irisan K dan C mempunyai 8 elemen, irisan B dan K mempunyai 6 elemen, dan irisan B, K, dan C mempunyai 5 elemen.

Diagram Venn-nya adalah sebagai berikut:



Dengan demikian kita peroleh:

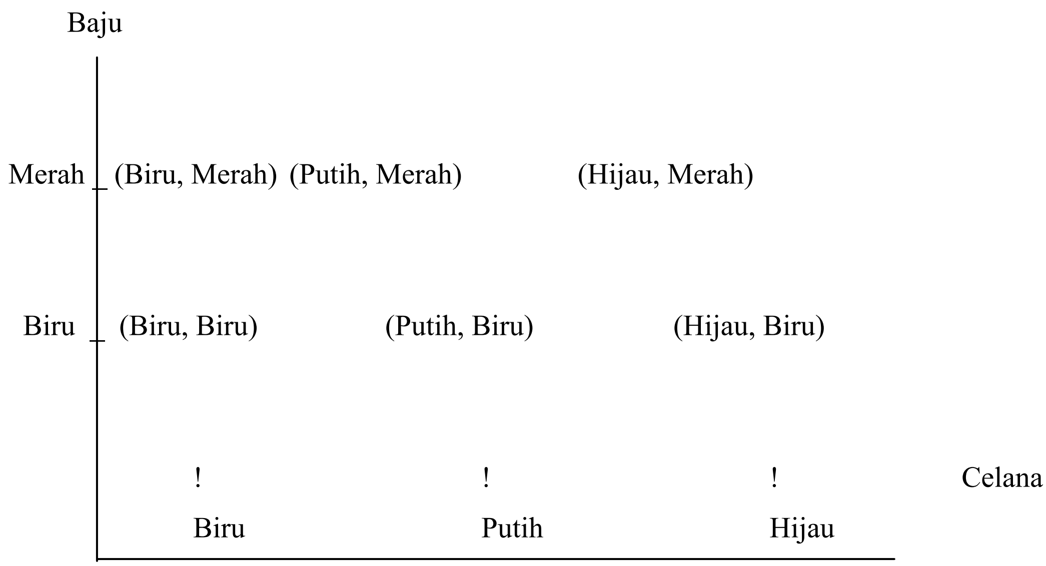
(1) Siswa yang menyukai karate tetapi tidak menyukai bulutangkis maupun catur adalah 36 orang.

(2) Siswa yang tidak menyukai baik bulutangkis, karate, ataupun catur adalah 11 orang.

Produk Kartesius

Cara lain untuk memperoleh suatu himpunan dari dua buah himpunan yang diberikan adalah dengan membentuk produk kartesius. Formasi ini memasangkan elemen-elemen dari satu himpunan dengan elemen-elemen dari himpunan lainnya dengan cara yang spesifik. Misalkan seseorang mempunyai tiga buah celana, C = {biru, pitih, hijau} dan dua baju, B = {biru, merah}.

Pasangan-pasangan celana dan baju membentuk sebuah himpunan semua kemungkinan di mana unsur pertama dari pasangan adalah elemen C dan unsur ke dua dari pasangan adalah elemen B. Himpunan semua kemungkinan-kemungkinan itu dapat ditunjukkan melalui gambar berikut:

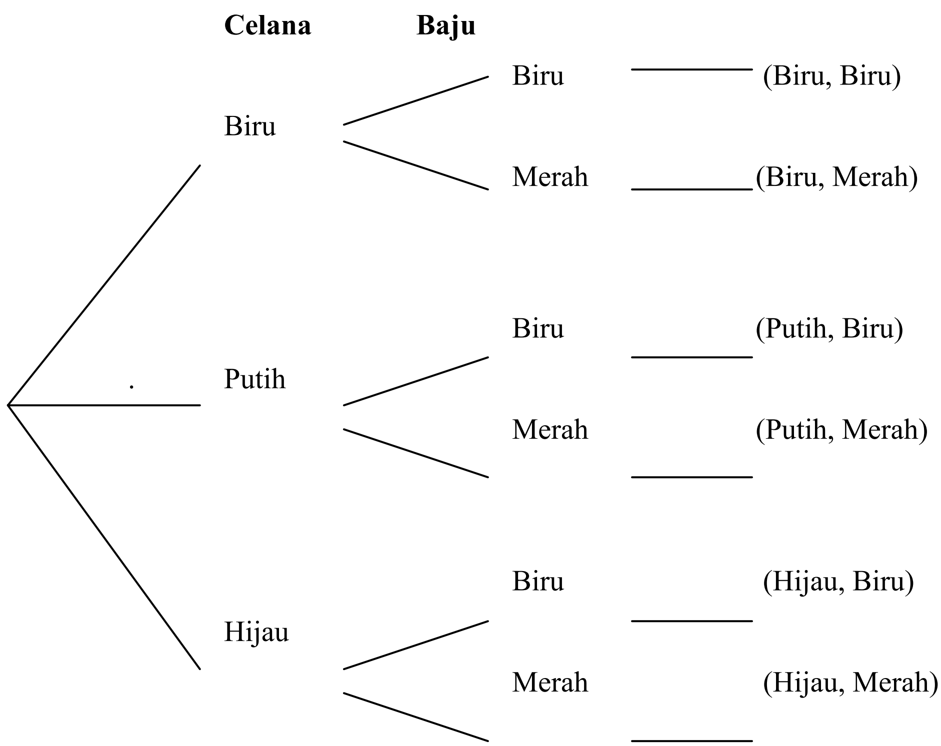


Karena komponen pertama dalam setiap pasang merepresentasikan celana dan unsur kedua dalam setiap pasang merepresentasikan baju, urutan komponen pada setiap pasang itu sangat penting untuk diperhatikan. Dengan demikian, (Hijau, Biru) merepresentasikan celana hijau dan baju biru, sedangkan (Biru, Hijau) merepresentasikan celana biru dan baju hijau. Untuk itu sekali lagi urutan komponen pada setiap pasang jangan diabaikan. Pasanagn-pasangan seperti ini dinamakan pasangan terurut. Menurut definisi, sebuah kesamaan pasangan terurut, (x, y) = (m, n) jika dan hanya jika komponen-komponen pertama adalah sama dan komponen-komponen kedua adalah juga sama. Sebuah himpunan yang terdiri dari pasangan-pasangan terurut seperti contoh di atas (celana dan baju) adalah produk kartesius dari himpunan celana dan himpunan baju.

Definisi.

Misalkan A dan B himpunan-himpunan. Pruduk kartesius dari A dan B, ditulis A X B, adalah himpunan semua pasangan terurut sedemikian sehingga elemen pertama setiap pasangan adalah elemen dari A dan elemen kedua dari setiap pasang adalah elemen dari B. A X B seringkali dibaca dengan " A kros B"

Cara lain untuk memperoleh produk kartesius adalah dengan menggunakan diagram pohon. Elemen-elemen produk kartesius dibangun oleh cabang-cabang pohon itu. Untuk kasus pasangan celana dan baju di atas, Perhatikan diagram pohon berikut!



Contoh.

Jika A = {a, b, c} dan B = {1, 2, 3}, tentukan:

(a) A X B

(b) B X A

(c) A X A

(d) B X B

Jawab:

(a) A X B = {(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3)}

(b) B X A = {(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)}

(c) A X A = {(a,a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)}

(d) B X B = {(1,1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}

Kita masih mungkin membuat produk kartesius yang melibatkan simpunan kosong. Misalkan A = {1, 2}. Kareana tidak ada elem dalam himpunan kosong, tidak ada pasangan-pasangan terurut (x, y) dengan x ϵ A dan y ϵ q yang mungkin. Jadi, A X q = A. Hal ini benar untuk semua himpunan A. Cara serupa berlaku juga untuk q X A. q X A = A untuk semua himpunan A.

Latihan 2

Untuk meningkatkan pemahaman Anda, pada materi kegiatan belajar ini, coba Anda kerjakan soal-soal berikut ini.

Misalkan : S = {e, q, u, a, l, i, t, y}
A = {l, i, t, e}
B = {t, i, e}
C = {q, u, e}

Tentukan:

1. $\overline{A}$
2. A U B
3. A ∩ B
4. A – B
5. A ∩ (B ∩ C)
6. (A ∩ B) ∩ C
7. A U (B U A)
8. (A U B) U C
9. A ∩ (B U C)
10. (A ∩ B) U (A ∩ C)
11. A U (B ∩ C)
12. (A U B) ∩ (A U C)
13. A X B

Petunjuk Jawaban Latihan 2

1. Tuliskan himpunan dari elemen di luar A.
2. Perhatikan definisi gabungan.
3. Perhatikan definisi irisan.
4. Seluruh elemen di A yang tidak di B
5. Seperti petunjuk no.3 dan kerjakan dahulu yang di dalam kurung.
6. Seperti petunjuk nomor 3 dan kerjakan dahulu yang di dalam kurung.
7. Seperti petunjuk nomor 2 dan kerjakan dahulu yang di dalam kurung.
8. Seperti petunjuk nomor 2 dan kerjakan dahulu yang di dalam kurung.
9. Seperti petunjuk nomor 2 dan nomor 3 serta kerjakan dahulu yang di dalam kurung.
10. Seperti petunjuk nomor 2 dan nomor 3 serta kerjakan dahulu yang di dalam kurung.
11. Seperti petunjuk nomor 2 dan nomor 3 serta kerjakan dahulu yang di dalam kurung.
12. Seperti petunjuk nomor 2 dan nomor 3 serta kerjakan dahulu yang di dalam kurung.
14. Perhatikan definisi produk kartesius.

Rangkuman

1. Irisan dua himpunan A dan B, ditulis A ∩ B, adalah himpunan semua elemen sekutu untuk A dan B. A ∩ B = {x | x ε A dan x ε B}. Jika himpunan A dan B tidak mempunyai elemen sekutu, maka kita katakan bahwa kedua himpunan itu saling lepas (disjoint sets).
2. Gabungan dua buah himpunan A dan B, ditulis A U B, adalah himpunan seluruh elemen dalam A atau dalam B.
   A U B = {x | x ε A atau x ε B}.
3. Komplemen A relatif terhadap B, ditulis B – A, adalah himpunan seluruh elemen pada B yang tidak terdapat pada A.
   B – A = {x | x ε B dan x ∉ A}.
4. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan-himpunan.
   a. A U B = B U A.
   b. A ∩ B = B ∩ A
   c. A ∩ (B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C
   d. A U (B U C) = (A U B) U C
   e. A ∩ (B U C) = (A ∩ B) U (A ∩ C)
   f. A U (B ∩ C) = (A U B) ∩ (A U C)
5. Misalkan A dan B himpunan-himpunan. Pruduk kartesius dari A dan B, ditulis A X B, adalah himpunan semua pasangan terurut sedemikian sehingga elemen pertama setiap pasangan adalah elemen dari A dan elemen kedua dari setiap pasang adalah elemen dari B. A X B seringkali dibaca dengan “ A kros B”.

Tes Formatif 2

Petunjuk: Pilihlah salah satu jawaban yang dianggap paling tepat !

1. Jika B $\subseteq$ A maka A $\cap$ B =
   a. A
   b. B
   c. S
   d. q

2. Jika P adalah sebuah himpunan maka P $\cup$ $\overline{P}$ =
   a. P
   b. $\overline{P}$
   c. S
   d. q

3. Jika a $\in$ A $\cup$ B maka
   a. a $\in$ A
   b. a $\in$ B
   c. a $\in$ A $\cap$ B
   d. a $\in$ $\overline{A \cap B}$

4. Jika A $\cap$ B = q maka A – B =
   a. A
   b. B
   c. $\overline{A}$
   d. $\overline{B}$

5. Jika n(A) = 3 dan n(B) = 2 maka maksimum n(A $\cap$ B) =
   a. 5
   b. 3
   c. 2
   d. 0

6. Jika A $\cap$ B = A $\cup$ B maka
   a. A $\subseteq$ B
   b. B $\subseteq$ A
   c. A = S
   d. A = B

7. Jika $A \subseteq B$ maka
   a. $A = B$
   b. $A = q$
   c. $A – B = S$
   d. $A – B = q$

8. Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{ 0 \}$ maka banyak elemen A X B =
   a. 4
   b. 3
   c. 1
   d. 0

9. Misalkan A dan B himpunan-himpunan berhingga. Pernyataan berikut ini yang benar adalah
   a. A X B = B X A
   b. n(A X B) = n(B X A)
   c. $A = B$
   d. $n(A) = n(B)$

10. Pernyataan berikut yang benar adalah
   a. Jika $n(A) = n(B)$ maka $A = B$
   b. Jika $A – B = q$ maka $A = B$
   c. Jika $A \subset B$ maka $n(A) < n(B)$
   d. Jika $n(A) < n(B)$ maka $A \subset B$

Balikan dan Tindak Lanjut

Cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir bahan ajar mandiri ini. Hitunglah jawaban Anda yang benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar .

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{5} \times 100\%$$

Makna dari tingkat penguasaan Anda adalah:

90% - 100% = Baik Sekali

80% - 89% = Baik

70% - 79% = Cukup

< 70% = Kurang

Kalau tingkat penguasaan Anda di atas 80 %, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80 %, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

Tes Formatif 1

1. b
2. c
3. c
4. b
5. d
6. d
7. d
8. d
9. b
10. d

Tes Formatif 2

1. b
2. c
3. c
4. a
5. c
6. d
7. d
8. b
9. b
10. c

PENALARAN

MODUL 2

PENALARAN

PENDAHULUAN

Modul ini merupakan bahan ajar kedua dari mata kuliah konsep dasar matematika. Modul ini terbagi ke dalam dua kegiatan belajar. Kegiatan belajar 1 memuat tentang penalaran induktif, dan kegiatan belajar 2 memuat tentang penalaran deduktif. Materi yang dibahas di dalam modul ini merupakan dasar untuk mempelajari materi-materi logika lebih lanjut. Dengan Mengusai materi ini kita akan terbantu dalam mempelajari dan mencerna materi-materi lain, baik yang berhubungan dengan logika matematika, matematika secara umum, maupun materi yang berhubungan dengan kehidupan sehari-hari..

Secara umum, setelah anda menyelesaikan modul ini diharapkan anda mampu memahami kalimat matematika, mampu memahami penalaran induktif, dan mampu memahami penalaran deduktif. Sedangkan secara khusus setelah anda mempelajari bahan ajar mandiri ini diharapkan dapat:

1. Menjelaskan pengertian penalaran.
2. Menjelaskan jenis-jenis kalimat matematika.
3. Memberikan contoh kalimat matmatika berdasarkan jenisnya..
4. Menjelaskan penalaran induktif.
5. Memberikan contoh penalaran induktif.
6. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan penalaran induktif.
7. Menjelaskan penalaran deduktif.
8. Memberikan contoh penalaran deduktif.
9. Menyelesaikan masalah dengan menggunakan penalaran deduktif.

Agar Anda berhasil dengan baik dalam mempelajri modul ini, ikutilah petunjuk-petunjuk berikut ini.

1. Bacalah dengan baik pendahuluan modul ini sehingga Anda memahami tujuan mempelajari modul ini dan bagaimana mempelajarinya.
2. Bacalah bagian demi bagian materi yang ada dalam modul ini, kalau perlu tandai kata-

kata / kaliamat yang dianggap penting. Ucapkan dalam bahasa sendiri kata/kaliamat yang ditandai tersebut.

3. Pahami pengertian demi pengertian dari isi modul ini dengan mempelajari contoh-contohnya, dengan pemahaman sendiri,dan berdiskusi dengan kawan mahasiswa atau orang lain.
4. Kerjakan soal-soal latihan dalam modul ini tanpa melihat petunjuk penyelesaiannya lebih dulu. Apabila mendapat jalan buntu, barulah Anda melihat petunjuk penyelesaiannya. Jawaban Anda tidak perlu sama dengan petunjuk yang diberikan, karena kadang-kadang banyak cara yang dapat kita lakukan dalam menyelesiakan suatu permasalahan.
5. Kerjakan soal-soal tes formatif untuk mengukur sendiri tingkat penguasaan anda akan isi modul ini.

   Sebagai acuan utama penulisan modul ini adalah: (1) buku karangan Yaya S. Kusumah (1986), *Logika matematika Elementer,* dan (2) buku karangan Billstein, Liberskind, dan Lot (1993), *A Problem Solving Approach to Mathematics for School Teachers*. Sedangkan sebagai rujukan tambahan penulisan modul ini adalah buku-buku logika matematika yang banyak beredar di pasaran.

Penalaran Induktif

Dalam kehidupan sehari-hari kita seringkali mendengar orang membuat kesimpulan dari fakta-fakta atau kondisi-kondisi yang ia dengar atau ia alami. Apakah kesimpulan yang ia buat itu benar ataukah tidak benar? Kita juga sering mendengar seseorang menanggapi cerita orang lain atau masalah orang lain. Apakah tanggapan yang diberikan itu relevan dengan persoalan semula? Seringkali kita berpendapat dengan melibatkan perasaan, prasangka, dan membuat kesimpulan-kesimpulan yang tidak berdasar. Kita sering membenarkan sesuatu hanya karena kita senangi, kita mengambil keputusan berdasarkan pendapat beberapa orang yang kebenarannya belum jelas. Kita juga sering tidak mampu memberikan alasan mengapa suatu pendapat itu kita terima atau kita tolak. Untuk dapat menarik kesimpulan yang benar atau memberi tanggapan yang relevan dengan pokok masalah kita perlu mempelajari logika.

Kata "logika" sering kita dengar dan mungkin sering kita gunakan dalam percakapan sehari-hari. Misalnya orang berkata, "langkah yang diambilnya itu logis", atau "menurut logikanya ia harus mengambil keputusan seperti itu". Kalau demikian apa yang disebut logika itu? Untuk itu kita harus memiliki pengertian yang jelas tentang logika. Secara estimologis, istilah logika berasal dari kata logos yang berarti kata, ucapan, fikiran secara utuh, atau dapat juga berarti ilmu pengetahuan. Dalam arti luas, logika adalah suatu metode atau prinsip-prinsip yang memisahkan secara tegas antara penalaran yang benar dan penalaran yang tidak benar. Di dalam logika kita mempelajari dan menyelidiki apakah sebuah penalaran yang kita lakukan itu benar atau tidak benar. Untuk dapat berpikir secara benar, logika menyajikan sejumlah aturan atau kaidah-kaidah yang dapat dimanfaatkan agar kesimpulan yang kita peroleh itu dapat dipertanggungjawabkan.

Logika tidak dapat dilepaskan dengan penalaran, karena logika adalah suatu prinsip yang membedakan antara penalaran benar dan penalaran tidak benar. Sementara itu, penalaran dapat diartikan sebagai cara berpikir, merupakan penjelasan dalam upaya menunjukkan hubungan antara beberapa hal yang berdasarkan pada sifat-sifat atau hukum-hukum tertentu yang telah diakui kebenarannya. Langkah-langkah tertentu itu akan berakhir pada suatu penarikan kesimpulan. Secara singkat, penalaran dapat

diartikan sebagai proses penarikan kesimpulan dalam sebuah argumen.

Matematika mengajarkan berpikir deduktif atau penalarannya dalam matematika adalah deduktif, walaupun demikian, sebelum menggunakan penalaran deduktif seringkali kita menggunakan penalaran induktif, yaitu melakukan kegiatan mengamati, menduga dari informasi yang ada untuk merumuskan suatu generalisasi (kesimpulan). Jika dipandang dari pembentukan matematika sebagai suatu ilmu, maka matematika merupakan suatu pengetahuan yang bersifat deduktif, sekalipun dalam awal terbentuknya pengetahuan matematika umumnya diawali dengan suatu proses induktif.

Kemampuan memahami materi matematika seseorang tidak dapat dilepaskan dari kemempuan penalaran. Artinya materi matematika akan mudah dipahami dengan adanya kemampuan nalar yang baik. Adapun penalaran dapat berkembang jika penguasaan materi matematikanya pun baik. Untuk itu marilah kita pelajari bagai mana kita menggunakan penalaran tersebut.

Sebuah kalimat dinamakan pernyataan jika kalimat itu bersifat tertutup, yaitu suatu kalimat yang bernilai benar atau salah, tetapi tidak sekaligus kedua-duanya (benar dan salah).

Contoh :

a. Semua bilangan real adalah bilangan rasional.
   Kalimat ini berniali salah (mengapa?)
b. Semua bilangan Asli adalah bilangan bulat.
   Kalimat ini benar (mengapa?)

Sebuah kalimat dikatakan bukan pernyataan jika kalimat itu bersifat terbuka, yaitu suatu kalimat yang tidak jelas nilai kebenarannya atau kalimat yang memuat nilai kebenaran benar sekaligus salah.

Contoh :

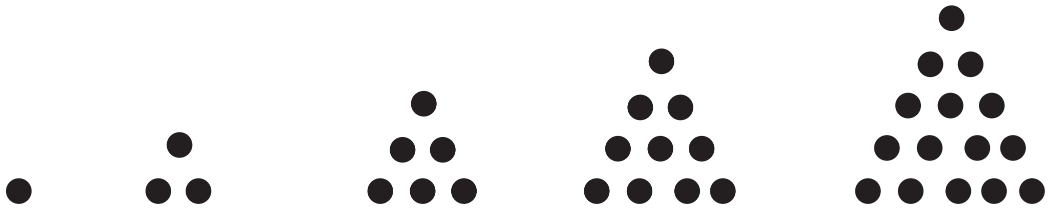
a. Siapakah orang itu?
b. Semoga Tuhan bersama kita.
c. $4x = 5$
d. N adalah bilangan asli.

Keempat contoh terakhir di atas adalah kalimat, akan tetapi bukanlah pernyataan, karena bernilai benar tidak, salah pun juga tidak.

Sekarang kita akan memperhatikan sebuah masalah yang disajikan sebagai berikut:

Diketahui beberapa susunan bulatan-bulatan seperti tampak pada gambar di bawah. Berapa banyak bulatan pada suku ke 10, ke-100, dan ke-n, jika Susunan yang tampak

pada gambar ini merepresentasikan lima suku pertama dari suatu barisan bilangan yang disebut bilangan-bilangan segitiga sama sisi.



Jawab.

Untuk menyelesaikan masalah ini, terlebih dahulu kita amati banyak bulatan pada setiap suku yang diketahui, yaitu:

Banyak bulatan pada suku pertama adalah 1.

Banyak bulatan pada suku ke dua adalah 3.

Banyak bulatan pada suku ke dua adalah 6.

Banyak bulatan pada suku ke dua adalah 10.

Banyak bulatan pada suku ke dua adalah 15.

Selanjutnya, kiata menggunakan strategi *membuat tabel*, yaitu sebagai berikut:

Suku ke	Nilai
1	1
2	$3 = 1 + 2$
3	$6 = 1 + 2 + 3$
4	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$
5	$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
.	.
10	$1 + 2 + 3 + \ldots + 9$

Dari tabel kita mengetahui bahwa suku ke-2 diperoleh dari suku ke-1 ditambah 2, suku ke-3 diperoleh dari suku ke-2 ditambah 3, dan seterusnya. Secara umum, karena bilangan segitiga sama sisi ke-n mempunyai n bulatan pada baris ke-n, bilangan segitiga sama sisi ke-n sama dengan banyaknya bulatan pada segitiga sama sisi sebelumnya (segitiga sama sisi (n-1)) ditambah n bulatan pada baris ke-n. Polanya adalah, suku ke-10 adalah $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$, atau 55. Suku ke-100 adalah $1 + 2 + 3 + ... + 100 = ½ \times 100 \times 101 = 5050$, dan suku ke-n adalah $1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n = ½\, n\, (n + 1)$

Setelah memperoleh nilai dari suku ke-n, yaitu $½\, n\, (n + 1)$, kita menggunakan rumus itu untuk melakukan peninjauan nilai dari beberapa suku, yaitu sebagai berikut:

Untuk $n = 1$, kita peroleh $½ .1\, (1 + 1) = 1$.
Untuk $n = 2$, kita peroleh $½ .2\, (2 + 1) = 3$.
Untuk $n = 3$, kita peroleh $½ .3\, (3 + 1) = 6$.

Cara lain mencari barisan bilangan-bilangan segitiga sama sisi adalah dengan memperhatikan beda-beda. sebagaimana kita lihat pada bilanagn kuadrat.

1 3 6 10 15

Beda pertama 2 3 4 5

Beda pertama, 2, 3, 4, 5 membentuk barisan aritmatika dengan beda 1.

2 3 4 5

Beda ke dua 1 1 1

Dengan menggunaan gagasan-gagasan "beda" ini, kita mengetahui bahwa bilangan segitiga sama sisi berikutnya (setelah 15) adalah $15 + 6$, atau 21.

Konsep-konsep matematika akan dapat pelajari dengan baik jika disertai dengan mengerjakannya. Di dalam proses bekerja itu, kita dituntut berpikir, seperti: mengungkapkan permasalahan, merencanakan penyelesaian, mengkaji langkah-langkah penyelesaian, menduga karena informasi yang tidak lengkap dan membuktikan teorema akan dapat kita ketahui dan rasakan.

Di dalam proses berpikir ini diperlukan suatu penalaran. Salah satu bentuk penalaran adalah penalaran induktif. Penalaran induktif adalah kemampuan seseorang dalam menarik kesimpulan yang bersifat umum melalui pernyataan yang bersifat khusus. Sedangkan penalaran deduktif adalah penarikan kesimpulan berdasarkan pernyataan-pernyatan yang bersifat umum.

Penalaran yang menggunakan pendekatan induktif pada prinsipnya menyelesaikan persoalan (masalah) matematika tanpa memakai rumus (dalil), melainkan dimulai dengan memperhatikan data / soal. Dari data / soal tersebut diproses sehingga berbentuk kerangka/pola dasar tertentu yang kita cari sendiri, sedemikian rupa sehingga kita dapat menarik kesimpulan. Penalaran induktif yang dibicarakan meliputi pembentukan pola, dugaan, dan generalisasi.

Masalah:
Perhatikan rangkaian kalimat matematika berikut ini, Bagaimana kita mengisi kalimat terakhir?

$P_1 + 1 = 2$
$P_2 .+ 1 = 5$
$P_3 + 1 = 10$
$P_4 + 1 = 17$
$P_5 + 1 =$ ....

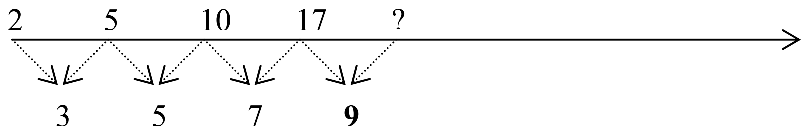
Untuk menjawab atau mengisi pernyataan terakhir tersebut, coba Anda misalkan suku pertama, $P_1 + 1 = 2$ atau $P_1 = 1$, suku ke dua $P_2 + 1 = 5$ atau $P_2 = 4 = 2^2$, $P_3 + 1 = 10$ atau $P_3 = 9 = 3^2$, $P_4 + 1 = 17$ atau $P_4 = 16 = 4^2$, dan selanjutnya dapat diduga kuat bahwa $P_5 = 5^2 = 25$. Dengan demikian, suku ke lima adalah $P_5 + 1 = 26$

Barisan P_1 , P_2 , P_3 , P_4 merupakan barisan 1, 4, 9, 16. Kita dapat menduga bahwa suku kelima adalah 25 yang didapatkan dari pola bilangan kuadrat (dari sini kita harus telah mengenal pola bilangan kuadrat), yaitu $1^2= 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, dan $5^2 = 25$. Karena bilangan semula dikurangi 1, maka untuk mendapatkan rumus, selanjutnya harus ditambah 1 menjadi $n^2 + 1$.

Jika melakukan tinjau ulang terhadap rumus tersebut ($n^2 + 1$), akan kita peroleh nilai dari beberapa suku sebagai berikut:

Untuk $n = 1$ atau ($P_1 + 1$) diperoleh $1^2 + 1 = 2$.
Untuk $n = 2$ atau ($P_2 + 1$) diperoleh $2^2 + 1 = 5$.
Untuk $n = 3$ atau ($P_3 + 1$) diperoleh $3^2 + 1 = 10$.
Untuk $n = 4$ atau ($P_4 + 1$) diperoleh $4^2 + 1 = 17$.
Untuk $n = 5$ atau ($P_5 + 1$) diperoleh $5^2 + 1 = 26$.

Cara lain kita untuk menyelesaikan masalah ini adalah dengan memperhatikan selisih antara suku pertama dengan suku kedua, selisih suku kedua dengan suku ketiga, dan sebagainya. Selisih suku ke dua dengan suku pertama adalah 3, selisih suku ke tiga dengan seku ke dua adalah 5, selisih suku ke empat dengan suku ke tiga adalah 7, dan selisih suku ke lima dan suku ke empat adalah 9. Selisih ini dapat disajikan seperti di bawah ini



Dari barisan bilangan tersebut di atas kita dapat menduga bahwa suku kelima dari pernyataan $P_5 + 1 = ... \Rightarrow 17 + 9 = 26$

$P_1 + 1 = 2$
$P_2 + 1 = 5$
$P_3 + 1 = 10$
$P_4 + 1 = 17$
$P_5 + 1 = 26$

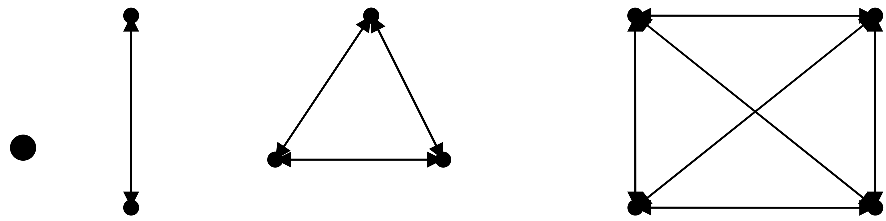
Selanjutnya kita akan meninjau lebih lanjut penerapan penalaran induktif dalam menyelesaikan beberapa masalah matematika. Untuk itu perhatikan beberapa contoh berikut.

Contoh 1

Pada suatu pertemuan terdapat 100 orang yang hadir. Semua orang yang hadir pada acara tersebut saling bersalaman satu dengan yang lainnya tepat satu kali. Berapa banyak kejadian bersalaman yang terjadi pada acara tersebut?

Jawab:

Dalam acara tersebut, jika yang hadir hanya 1 orang, maka tidak akan terjadi salaman. Jika yang hadir 2 orang, maka terjadi 1 kali salaman. Jika yang hadir 3 orang, maka terjadi 3 kali salaman. Jika 4 orang yang hadir, maka terjadi 6 kali bersalaman. *(Bagaimana untuk sampai kepada 100 orang?, tentu akan membutuhkan waktu yang lama)*. Untuk lebih jelas lihat pola gambarnya berikut ini:



Selanjutnya kita buat tabel untuk menyederhanakan permasalahan agar mudah dianalisis, seperti berikut ini.

Banyak Orang (n)	Salaman Yang Terjadi
1	0
2	1
3	3
4	6
...	...
100	?

Dari tabel di atas, mungkin kita berpikir bahwa jika banyak orang adalah 1 maka banyak salaman adalah 0 kejadian, jika banyak orang adalah 2 maka banyak salaman adalah 1 kejadian, jika banyak orang adalah 3 maka banyak salaman adalah 3 kejadian, jika banyak orang adalah 4 maka banyak salaman adalah 4 kejadian. Bagaimana pola hubungan antara banyak orang dan banyak salaman? Dapatkah kita menemukan hubungan tersebut? Proses hitung apakah yang terjadi pada suatu baris kolom ke dua jika diketahui suatu bilangan pada baris yang sama pada kolom pertama? Penjumlahan, perkalian, pengurangan, pembagian, dan atau kombinasi dari dua atau lebih operasi hitungkah?

Jika kita perhatikan gejala antara banyak orang dan banyak salaman dari beberapa kasus di atas, maka kita dapat mengambil kesimpulan sementara bahwa bilangan-bilangan pada kolom ke dua, mulai dari baris pertama, ke dua, ke, tiga berturut-turut adalah sebagai berikut:

½ x 0 x 1 = 0,

½ x 1 x 2 = 2,

½ x 2 x 3 = 3,

½ x 3 x 4 = 6.

Jika kita susun bilangan-bilangan tersebut pada tabel, akan diperoleh sebagai berikut:

Banyak Orang (n)	Salaman Yang Terjadi	Pola Operasi Hitung
1	0	½ x 0 x 1
2	1	½ x 1 x 2
3	3	½ x 2 x 3
4	6	½ x 3 x 4
...	...	...
100	.....	½ x 99 x 100
n		½ x (n – 1) x n

Kesimpulan:

Jika yang hadir dalam acara silaturahmi tersebut sebanyak 100 orang, maka banyak bersalaman terjadi ½ x 99 x 100 = 4.950.

Jika yang hadir pada silaturahmi itu ada n orang maka banyak salaman terjadi adalah (½ x (n – 1) x n).

Cara lain untuk menyelesaikan masalah ini adalah dengan melakukan simulasi.

Jika ada 2 orang, misalkan A dan B maka kejadian salamannya AB (1 kejadian)

Jika ada 3 orang, misalnya A, B,C maka kejadian salamannya AB, AC, dan BC. (2 + 1 = 3 kejadian)

Jika ada 4 orang, misalnya A, B, C, dan D, maka kejadian salamannya AB, AC, AD, BC, BD, dan CD (3 + 2 + 1 = 6 kejadian).

Jika ada 5 orang, misalnya A, B, C, D, dan E, maka kejadian salamannya AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, dan DE (4 + 3 + 2 + 1 = 10 kejadian).

Jika ada 6 orang, misalnya A, B, C, D, E, dan F maka kejadian salamannya AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF, dan EF (5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 kejadian).

Dari simulasi untuk beberapa orang diperoleh data sebagai berikut:

Banyak Orang	Banyak Kejadian Salaman
2	1

3	2 + 1
4	3 + 2 + 1
5	4 + 3 + 2 + 1
6	5 + 4 + 3 + 2 + 1
.	
.	
100	99 + 98 + 97 + ... + 1

Jika banyak orang adalah 100 maka banyak kejadian salaman adalah

1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 =

Jika kita pasang-pasangkan dan jumlahkan bilangan yang ada dalam tanda kurung diperoleh ada 49 pasang sisa satu bilangan yang tidak mempunai pasangan, yaitu 50, dimana

1 + 99 = 100

2 + 98 = 100

..

.

.

.

.49 + 51 = 100

Dengan demikian,

1 + 2 + 3 + ...+ 98 + 99 = 49 x 100 + 50

= 4900 + 50

= 4950

Jadi jika terdapat 100 orang maka banyak kejadian salaman adalah 4950.

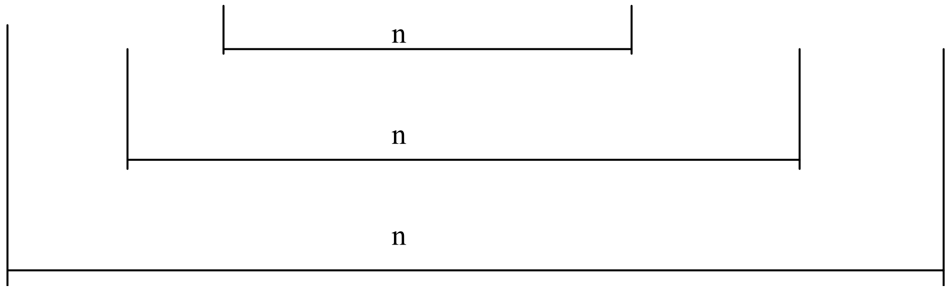
Bagaimana jika yang hadir adalah n orang?

Jika yang hadir adalah n orang maka banyak kejadian salamannya adalah

(1 + 2 + 3 + ... + (n – 3) +(n – 2) + (n – 1)).

Bilangan di atas merupakan jumlah (n – 1) bilangan asli pertama. Jika operasi penjumlahannya dilakukan dengan memasang-masangkan maka akan terdapat sebanyak ½ x (n – 1) pasang, dengan setiap pasang adalah n. Untuk lebih jelasnya, perhatikan model pemasangan berikut:

$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1) =$



Karena ada (n – 1) buah bilangan yang dijumlahkan dan dipasangkan, kita memperoleh (½ x (n -1)) pasang. Hasil penjumlahan setiap pasang adalah n.

Dengan demikian,
$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1) = \frac{1}{2} \times (n-1) \times n$

Selanjutnya kita periksa kembali hasil itu (rumus umum kejadian salaman) untuk beberapa kasus n, yaitu sebagai berikut:

Untuk n = 1 (banyak orang adalah 1) diperoleh banyak salaman ½ x 0 x 1 = 0.
Untuk n = 2 (banyak orang adalah 2) diperoleh banyak salaman ½ x 1 x 2 = 1
Untuk n = 3 (banyak orang adalah 3) diperoleh banyak salaman ½ x 2 x 3 = 3
Untuk n = 4 (banyak orang adalah 4) diperoleh banyak salaman ½ x 3 x 4 = 6.

Contoh 2:

Pertandingan sepak bola di Wilayah Barat Indonesia diikuti oleh 15 kesebelasan. Sistem pertandingan menggunakan sistem kompetisi penuh (setiap kesebalasan masing-masing bertanding 2 kali dengan kesebelasan-kesebelasan lainnya, yaitu satu kali bertanding di daerah sendiri dan satu kali lagi bertanding di daerah lawan). Berapakah pertandingan yang akan terjadi jika semua dilakukan?

Jawab:

Tahap pertama yang harus kita lakukan adalah membuat tabel pertandingan yang dapat dibuat adalah sebagai berikut:

No. Kesebelasan	1	2	3	4	5	...	15
1							
2							

3							
4							
5							
...							
15							

Tabel selanjutnya dibuat berdasarkan banyaknya bertandingan yang terjadi, seperti berikut.

Banyak Kesebelasan (n)	Pertandingan Yang Terjadi
1	0
2	2
3	6
4	12
...	...
15	?

Tabel tersebut jika dikembangkan seperti berikut

Banyak Kesebelasan	Pertandingan Yang Terjadi	Pola Operasi Hitung
1	0	1 x 0
2	2	2 x 1
3	6	3 x 2
4	12	4 x 3
...	...	...
15	....	15 x 14
n	.....	n x (n - 1)

Kesimpulan:

Jika peserta kesebelasan yang ikut pertandingan maka banyaknya pertandingan yang terjadi sebanyak 15 x14= 210 pertandingan dengan rumus untuk kejadian tersebut adalah: n x (n - 1).

Cara lain untuk menyelesaikan masalah ini adalah dengan melakukan simulasi.

Jika ada 2 team, misalkan A dan B maka kejadian pertandingannya AB dan BA (2 x 1 = 2 kejadian)

Jika ada 3 team, misalnya A, B,C maka kejadian pertandinagnnya AB, BA, AC, CA, BC, dan CB. (2 x (1 + 2) = 6 kejadian)

Jika ada 4 team, misalnya A, B, C, dan D, maka kejadian pertandingannya AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD, dan DC (2 x (1 + 2 + 3) = 12 kejadian).

Jika ada 5 team, misalnya A, B, C, D, dan E, maka kejadian pertandingannya AB, BA, AC, CA, AD, DA, AE, EA, BC, CB, BD, DB, BE, EB, CD, DC, CE, EC, DE, dan ED (2 x (1 + 2 + 3 + 4) = 20 kejadian).

Jika ada 6 orang, misalnya A, B, C, D, E, dan F maka kejadian salamannya AB, BA, AC, CA, AD, DA, AE, EA, AF, FA, BC, CB, BD, DB, BE, EB, BF, FB, CD, DC, CE, EC, CF, FC, DE, ED, DF, FD, EF, dan FE (2 x (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 30 kejadian).

Dari kejadian pertandinag untuk beberapa team kita dapat membuat tabel sebagai berikut:

Banyak Team	Banyak Kejadian Pertandingan
2	2 x 1
3	2 x (1 + 2)
4	2 x (1 + 2 + 3)
5	2 x (1 + 2 + 3 + 4)
6	2 x (1 + 2 + 3 + 4 + 5)
.	
.	
15	2 x (1 + 2 + 3 + ...+ 14)

Jika banyak team adalah 15 maka banyak kejadian pertandinagn adalah

2 x (1 + 2 + 3 + ... + 12 + 13 + 14) =

Jika kita pasang-pasangkan dan jumlahkan bilangan yang ada dalam tanda kurung diperoleh ada 7 pasang, dimana

1 + 14 = 15

2 + 13 = 15

3 + 12 = 15

..

.

.

.

.7 + 8 = 15

Dengan demikian,

2 x (1 + 2 + 3 + ... + 12 + 13 + 14) =

= 2 x 7 x 15

= 14 x 15

Jadi jika terdapat 15 orang maka banyak kejadian pertandingan adalah 210.

Bagaimana jika banyak teamnya 30?

Jawabnya adalah 29 x 30 kejadian pertandingan (mengapa?)

Bagaimana jika banyak teamnya n?

Jababnya adalah (n – 1) x n kejadian pertandingan.

Contoh 3:

Selidikilah jumlah 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + ...+ 19

Jawab:

1 = 1 = 1 x 1

1 + 3 = 4 = 2 x 2

1 + 3 + 5 = 9 = 3 x 3

1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4 x 4

1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5 x 5

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6 x 6

Karena bilangan ganjil dari 1 sampai dengan 19 ada 10 buah, dengan memperhatikan pola di atas kita dengan cepat dapat memperoleh hasilnya, yaitu 10 x 10 = 100.

Jika kita diminta untuk mencari hasil penjumlahan n bilangan asli pertama, atau ditulis 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n – 1) maka kita dapat dengan cepat memperoleh hasilnya, yaitu (n x n).

Bagaimana kalau yang ditanyanyakan adalah jumlah suku sampai dengan suku ke 50?

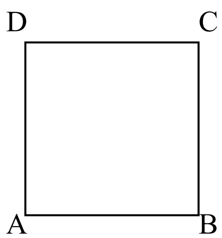
Jawab:

50 x 50 = 2500.

Contoh 4:

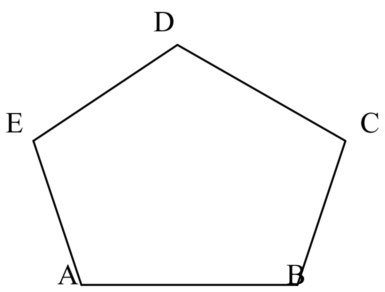
Berapa banyak diagonal segi n?

Jawab:



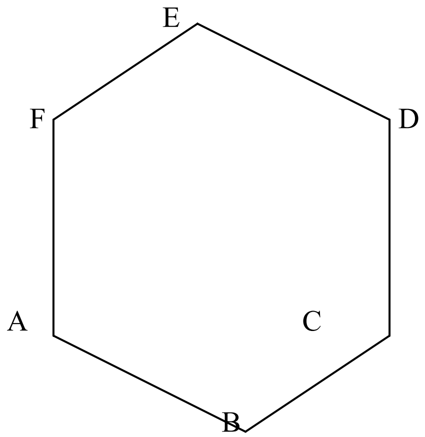
Diagonal-diagonal segi-4 ABCD adalah AC dan BD.

Dengan demikian banyak diagonal segi- 4 = 1 + 1 = 2.



Diagonal-diagonal segi-5 ABCDE adalah AC, AD, BD, BE, dan CE.

Dengan demikian banyak diagonal segi-5 = 2 + 2 + 1.



Diagonal-diagonal segi-6 ABCDEF adalah AC, AD, AE, BD, BE, BF, CE, CF, dan DF.

Dengan demikian banyak diagonal segi-6 = 3 + 3 + 2 + 1

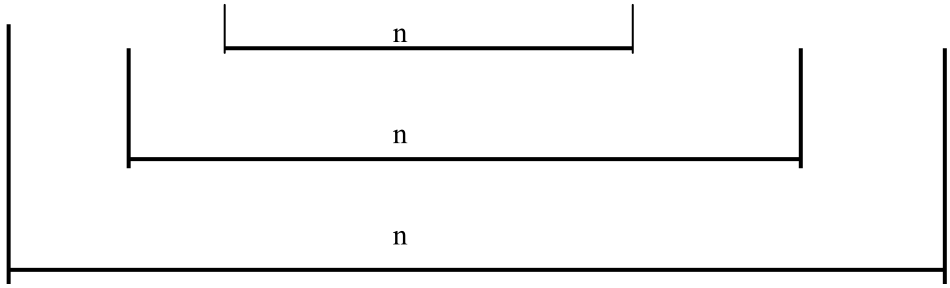
Jika kita buat tabelnya, akan diperoleh sebagai berikut:

Segi	Banyak Diagonal
4	1 + 1
5	2 + 2 + 1
6	3 + 3 + 2 + 1
.	
.	
50	47 + 47 + 46 + 45 + 44 + 43 + ... + 1
N	(n -3) + (n – 3) + (n – 4) + ... + 3 + 2 + 1

Dari tabel di atas, kita dapat menganalisis dan selanjutnya menyimpulkan dengan cara berikut:

Banyak diagonal segi-4 = 1 + 1 = 2
Banyak diagonal segi-5 = 2 + 2 + 1 = 2 + 3
Banyak diagonal segi-6 = 3 + 3 + 2 + 1 = 2 + 3 + 4
Banyak diagonal segi-7 = 2 + 3 + 4 + 5
Banyak diagonal segi-n = 2 + 3 + 4 + ... + (n – 4) + (n – 3) + (n – 2)

2 + 3 + 4 + ...+ (n – 4) + (n – 3) + (n – 2) =



Karena ada (n – 3) buah bilangan yang dijumlahkan dan dipasangkan, kita memperoleh (½ x (n -2)) pasang. Hasil penjumlahan setiap pasang adalah n.

Dengan demikian,

2 + 3 + 4 + ... + (n – 4) + (n – 3) + (n – 2) = ½ x (n – 3) x n

= ½ n x (n – 3)

Selanjutnya kita periksa kembali hasil itu (rumus umum banyak diagonal segi-n) untuk beberapa kasus n.

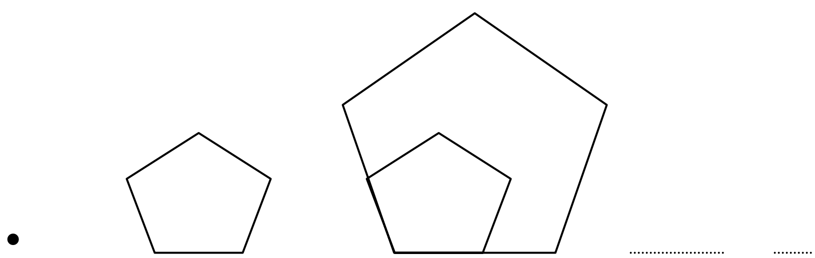
Jika n = 4 (segi-4) maka banyak diagonalnya adalah ½ x 4 x (4 – 3) = 2

Jika n = 5 (segi-5) maka banyak diagonalnya adalah ½ x 5 x (5 – 3) = 5

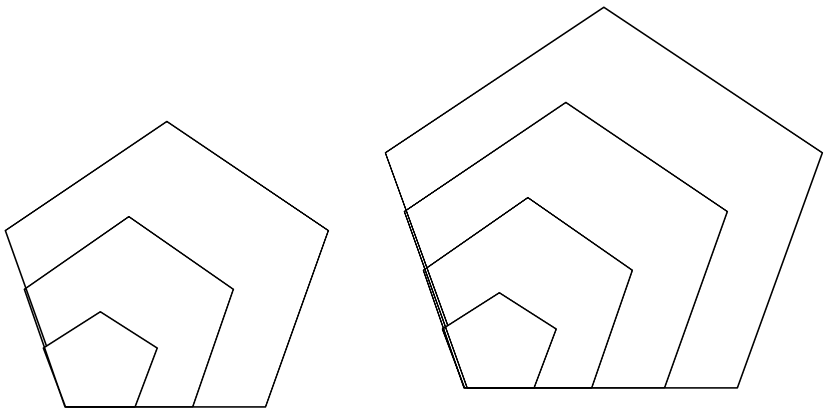
Jika n = 6 (segi-6) maka banyak diagonalnya adalah ½ x 6 x (6 – 3) = 9

Jika n = 7 (segi-7) maka banyak diagonalnya adalah ½ x 7 x (7 – 3) = 14

Contoh 5:

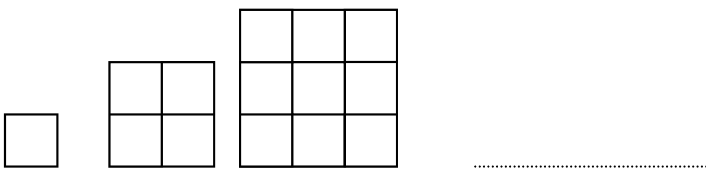


Perhatikan gambar berikut dan lanjutkan dua gambar berikutnya.

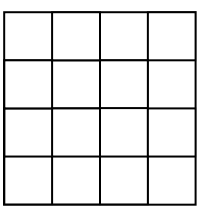


Jawab:
Dua gambar berikutnya adalah seperti berikut.

(Selidiki, mengapa kedua gambar itu berturut-turut seperti ini?)
Contoh 6:
Perhatikan gambar di bawah ini.
Gambar ke-1 terdiri dari 1 persegi kecil.
Gambar ke-2 terdiri dari 4 persegi kecil.
Gambar ke-3 terdiri dari 9 persegi kecil.
a. Buatlah satu gambar berikutnya (gambar ke-4)!
b. Berapa banyak persegi kecil pada gambar ke-n?



Jawab:
a. Gambar berikutnya (gambar ke-4) adalah seperti gambar dibawah ini



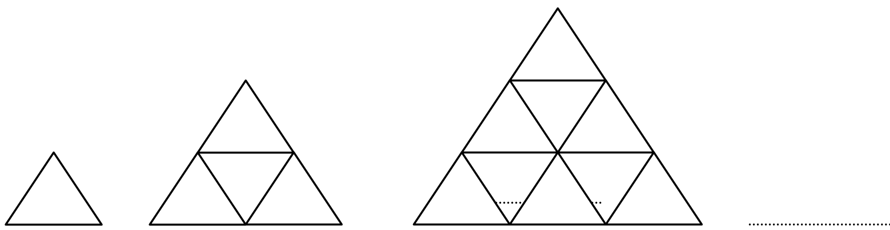
b. Banyak persegi kecil pada gambar ke-1 adalah 1 atau 1 x 1
Banyak persegi kecil pada gambar ke-2 adalah 4 atau 2 x 2

Banyak persegi kecil pada gambar ke-3 adalah 9 atau 3 x 3

Dengan demikian, banyak persegi kecil pada gambar ke n adalah (n x n).

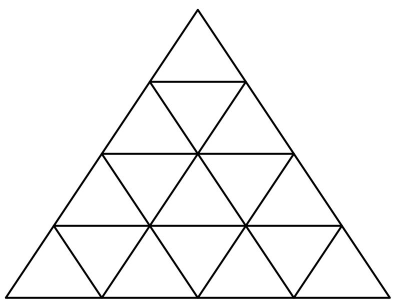
Contoh 7:

Perhatikan gambar berikut ini dan lanjutkan ke gambar berikutnya.



Jawab:

Perhatikan gambar selanjutnya seperti di bawah ini.



Latihan 1

Untuk meningkatkan pemahaman Anda, pada materi kegiatan belajar ini, coba Anda kerjakan soal-soal berikut ini.

1. Isilah titik-titik pada soal berikut dengan membubuhkan bilangan yang tepat?
   (a) 2, 4, 6, 8, ..., ..., ...
   (b) 0, -3, -6, -9, ..., ..., ...
   (c) 1, 2, 4, 8, ..., ..., ...
   (d) 1, 3, 6, 10, ..., ..., ...

2. Diketahui suatu barisan bilangan. Suku pertamanya adalah a dan selisih dengan bilangan berikutnya adalah b.
   (a) Carilah bilangan ke 10
   (b) Carilah jumlah sampai dengan suku ke 10
   (c) Carirlah jumlah sampai suku ke25 jika diketahui a=5 dan b=2

3. Diketahui barisan bilangan 1, 2, 6, 24, 120, ...
   Carilah suku ke10

4. Tentukan dua suku berikutnya dan rumus suku ke n yang dapat ditarik dari barisan bilangan: 3, 6, 11, 18, ...

Petunjuk Jawaban Latihan

1. a. Perhatikan beda antara suatu suku dan suku sebelumnya atau berikutnya.
   b. Serupa dengan a.
   c. Perhatikan rasio antara suatu suku dan suku sebelumnya atau berikutnya.
   d. Serupa dengan c.

2. a. Suku pertama a, suku ke dua adalah a + b, suku ke tiga adalah a + 2b, suku ke empat adalah a+ 3b.
   b. Jumlahkan unsur-unsur a dan jumlahkan pula unsur-unsur b.
   c. Serupa dengan b.
   1. Suku ke-2 diperoleh dari 2 x suku ke-1.
   Suku ke-3 diperoleh dari 3 x suku ke-2.
   Suku ke-4 dperoleh dari 4 x suku ke-3.
   dst.

4. Barisan bilangan: 3 6 11 18 ... .
selisih 3 dan 6 adalah 3, selisih 6 dan 11 adalah 5, dan selisih 11 dan 18 adalah 7, tentu selisih 18 dengan suku berikutnya adalah 9 (jadi suku kelima adalah 18 + 9 = 27), dan selisih antara 27 dengan suku berikutnya adalah 11 (jadi suku ke enam adalah 27 + 11 = 38).

Rumus didapat dari pola sebagai berikut:

Karena setiap selisih antara satu suku dengan suku berikutnya selalu 2, dan setiap satu suku bila dikurangkan 2 selalu menunjuk kepada bilangan kuadrat sempurna (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, dan 6^2). Maka rumus untuk barisan tersebut di atas adalah $n^2 + 2$.

Rangkuman

1. Penalaran induktif adalah kemampuan seseorang dalam menarik kesimpulan yang bersifat umum melalui pernyataan yang bersifat khusus. Kegiatan tersebut membutuhkan kegiatan-kegiatan seperti: mengungkapkan permasalahan, merencanakan penyelesaian, dan melaksanakan penyelesaian, serta membuat dugaan-duagaan.
2. Penalaran induktif bermula dari percobaan-percobaan atau contoh-contoh dan dari contoh-contoh tersebut dicari pola atau ciri kesamaannya untuk dapat disusun menjadi suatu kesimpulan yang berupa rumus atau teorema dugaan.

TES FORMATIF 1

Petunjuk: Pilihlah salah satu jawaban yang dianggap paling tepat !

1. Diketahui barisan: $2 + A_1 = 4$; $3 + A_2 = 7$; $4 + A_3 = 10$; $5 + A_4 =$ ....
   Suku ke-4 harus dilengkapi dengan bilangan
   a. 9
   b. 13
   c. 15
   d. 17

2. Suku ke-5 dari barisan 5, 8, 12, 17, 23, ... adalah
   a. 25
   b. 27
   c. 30
   d. 32

3. Suku ke n dari barisan 1, 4, 9, 16, ... adalah
   a. n
   b. 2n
   c. 3n
   d. n^2

4. Diketahui barisan bilangan : 2, 5, 10, 17, 26, p , q , maka :
   a. p = 37 dan q = 49
   b. p = 36 dan q = 49
   c. p = 36 dan q = 50
   d. p = 37 dan q = 50

5. Pola barisan bilangan : 2, 5, 8, 11, 14, ... adalah
   a. 4n -2
   b. 3n - 1
   c. 5n – 3
   d. 6n -4

6. Dalam suatu pertandingan sepak bola yang diikuti oleh 20 kesebelasan, berapa jumlah pertandingan yang akan terjadi jika menggunakan sistem setengah kompetisi?
   a. 190

b. 200
c. 210
d. 380

7 Ada 100 garis bertemu di satu titik. Berapa pasang sudut yang terbentuk oleh garis-garis tersebut?
a. 10000
b. 5000
c. 9900
d. 4950

8 Rumus banyaknya garis diagonal yang dapat dibentuk oleh segi 10 adalah ...

a. $\frac{1}{2}n(n-1)$

b. $\frac{1}{2}n(n-2)$

c. $\frac{1}{2}n(n-3)$

d. $\frac{1}{2}n(n-4)$

9. Diberikan barisan bilangan : $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ Suku ke 20 adalah!

a. $\frac{1}{2^{20-1}}$
b. $\frac{1}{2^{20-2}}$
c. $\frac{1}{2^{20-3}}$
d. $\frac{1}{2^{20}}$

10. Perhatikan segitiga Pascal (tidak lengkap) berikut:

1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 1

Segitiga Pascal tersebut dapat dilengkapi dengan:

a. 6, 15, 20, 15, 6
b. 6, 9, 14, 9, 6
c. 6, 16, 20, 16, 6
d. 6, 11, 20, 11, 6

Balikan dan Tindak lanjut

Cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban Anda yang benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{5} \times 100\%$$

Makna dari tingkat penguasaan Anda adalah:

90% - 100% = Baik Sekali

80% - 89% = Baik

70% - 79% = Cukup

< 70% = Kurang

Kalau tingkat penguasaan Anda di atas 80 %, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80 %, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

Penalaran Deduktif

Kita akan memulai dengan sebuah masalah, yaitu:

"Apakah untuk setiap n anggota bilangan asli berlaku $2^n < 128\,n + 512$?"

Untuk menjawab masalah itu, marilah kita coba dengan menggunakan penalaran induktif. Kita mulai untuk n = 1, kemudian berturut-turut n = 2, n = 3, n = 4, dan n = 5. Selanjutnya kita simpulkan, apa yang akan terjadi?

Untuk n = 1, kita peroleh $2^1 < 128 \times 1 + 512$ atau $2 < 640$ (Benar).

Untuk n = 2, kita peroleh $2^2 < 128 \times 2 + 512$ atau $4 < 768$ (Benar).

Untuk n = 3, kita peroleh $2^3 < 128 \times 3 + 512$ atau $8 < 896$ (Benar).

Untuk n = 4, kita peroleh $2^4 < 128 \times 4 + 512$ atau $16 < 1024$ (Benar).

Untuk n = 5, kita peroleh $2^5 < 128 \times 5 + 512$ atau $32 < 1152$ (Benar).

Dengan demikian, untuk setiap n anggota bilangan asli berlaku $2^n < 128\,n + 512$.

Penarikan kesimpulan ini menyesatkan, karena kita baru mencoba untuk 5 buah bilangan asli pertama. Untuk bilangan asli yang lain bisa jadi pertidaksamaan ini salah. Untuk itu perhatikan contoh penyangkal berikut ini.

Dengan memilih n = 12, apakah $2^{12} < 128 \times 12 + 512$?

Karena $2^{12} = 4096$ dan $128 \times 12 + 512 = 2048$, kita tidak dapat menyimpulkan bahwa untuk setiap n anggota bilangan asli berlaku $2^n < 128\,n + 512$.

Memperhatikan kejadian di atas, agar kesimpulan yang kiita tarik tidak menyesatkan, kita perlu sikap kritis dalam menggunakan penalaran induktif. Pada kegiatan belajar ini kita akan membahas penalaran lain, selain penalaran induktif, yaitu penalaran deduktif. Perhatikan beberapa rangkaian pernyataan berikut ini.

Rangkaian Pernyataan 1.

Setiap manusia adalah fana.

Pak Ahmad adalah manusia.

Jadi, Pak Ahmad adalah fana.

Rangkaian pernyataan 2.

Hasil kali dua bilangan ganjil adalah bilangan ganjil.

1023 dan 5981 adalah bilangan bilangan ganjil.

Jadi, hasil kali antara 1023 dan 5981 adalah bilangan ganjil.

Dalam Penalaran deduktif, proses penarikan kesimpulannya merupakan kebalikan dari penalaran induktif. Jika pada penalaran induktif terjadi proses penarikan kesimpulan dari hal-hal khusus menuju hal-hal-hal umum, maka pada penalaran deduktif terjadi proses penarikan kesimpulan dari hal-hal umum menuju ke hal-hal khusus. Di dalam membuktikan dengan penalaran deduktif, kesimpulan didasarkan atas pernyataan generalisasi yang berlaku umum dan pernyataan khusus serta tidak menerima generalisasi dari hasil observasi seperti yang diperoleh dari penalaran induktif.

Dasar penalaran deduktif yang berperan dalam matematika adalah kebenaran suatu pernyataan haruslah didasarkan pada kebenaran pernyataan-pernyataan lain. Penarikan kesimpulan yang demikian ini sangat berbeda dengan penarikan kesimpulan pada penalaran induktif yang didasarkan pada hasil pengamatan atau eksperimen yang terbatas. Kebenaran yang diperoleh dari hasil pengamatan atau eksperimen tidak bisa dijamin bebas dari kesalahan atau salah menafsirkan.

Secara umum dapatlah dikatakan, penalaran induktif berperan penting dalam bidang non matematika, namum berperan kecil dalam matematika. Penalaran deduktif berperan kecil dalam bidang non matematika, namum berperan besar dalam bidang matematika. Bila dalam penalaran deduktif, kebenaran setiap pernyataan harus didasarkan pernyataan sebelumnya yang benar, bagamana menyatakan kebenaran dari pernyataan yang paling awal? Untuk mengatasi hal ini, penalaran deduktif memasukkan beberapa pernyataan awal / pangkal sebagai "kesepakatan" , definisi, dan aksioma atau postulat.

Misalkan T_n benar berdasarkan T_{n-1} yang sudah dibuktikan kebenarannya dan kebenaran T_{n-1} dibuktikan atas kebenaran T_{n-2}, demikian juga kebenaran T_{n-2} sudah dibuktikan berdasarkan atas kebenaran T_{n-3} dan seterusnya sampai dengan T_0 yang kebenarannya tidak perlu lagi dibuktikan karena penyepakatan T_0 benar.

Rangkaian T_0 sampai T_n dapat diilustrasikan seperti berikut.

$T_0 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow$ ....$T_{n-1} \Rightarrow T_n$

T_0 sendiri memerlukan pengertian yang tidak didefinisikan sebab tidak mungkin kita selalu dapat mendifinisikan suatu pengertian. Pengertian yang tidak didefinisikan tersebut dinamakan pengertian pangkal.

Titik merupakan contoh pangkal tersebut, sebab titik dianggap ada, tetapi tidak dapat dinyatakan dengan kalimat yang tepat. Dari duan titik yang berbeda kita dapat membuat tepat sebuah garis. Dari dua garis atau lebih kita akan menemukan istilah garis sejajar, garis berpotongan, istilah sudut, bidang datar dan ruang.

Dengan penalaran deduktif dari kumpulan aksioma yang menggunakan pengertian pangkal tersebut, kita dapat sampai kepada teorema-teorema yaitu pernyataan-pernyataan yang benar.

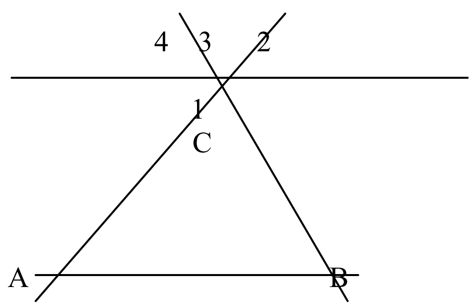
Perhatikan contoh-contoh berikut ini.

Contoh 1

Buktikan besar sudut setiap segitiga adalah 180^0!

Bukti:

Perhatikan sebarang segitiga ABC berikut.



L A = L C_2(sehadap)

L B = LC_4 (sehadap)

LC_1 = L C_3 (bertolak belakang)

Dengan demikian,

L A + L B + L C_1 = L C_2 + LC_4 + LC_3

= 180^0

Contoh 2

Pak Aji meminjam uang di Koperasi Simpan Pinjam sebesar Rp. 12.000.000,00. Aturan

bunga yang diterapkan adalah bunga berjalan (tidak tetap) sebesar 12 % pertahun. Pak Aji akan mengembalikan selama 2 tahun secara dicicil. Berapakah besar bunga yang diberikan Pak Aji kepada Koperasi tersebut?

Jawab:

Tahap pertama yang harus kita lakukan adalah mengebah kalimat soal kedalam kalimat matematika, yaitu model perhitungan bunga perbulan. Seterusnya kita harus mengenali permasalahan apakah yang terkait dengan kejadian tersebut dan bagaimana rumus yang akan digunakan.

Rumus yang terkait dengan soal tersebut adalah rumus deret aritmatika, yaitu:

Rumus U_n= a+(n-1)b dan Rumus $S_n = \frac{1}{2}n[2a+(n-1)b]$ *atau* $\frac{1}{2}n(a+U_n)$

Dengan keterangan: U_n= Suku ke n

a= Suku pertama

b= Beda antara suku 1 dan 2, 2 dan 3, ...

S_n= Jumlah suku samapi ke n

Dengan demikian kita harus mencari dahulu suku pertama, yaitu: bunga yang pertama (a), kedua, ketiga, keempat (jika perlu). Dari suku pertama dan kedua akan didapat selisih (b).

Besarnya cicilan perbulan= Rp. 12.000.000,00/24 bulan= Rp. 500.000,00

Suku pertama = bunga pertama= a= (12% x Rp. 12.000.000,00)/12= Rp. 120.000,00

Suku kedua = bunga kedua= [12% x (Rp. 12.000.000,00 – Rp. 500.000,00)]/12

Rp115.000,00

Suku ketiga = bunga ketiga= [12% x (Rp. 11.500.000,00 – Rp. 500.000,00)]/12= Rp110.000,00

Sehinga kita mendapatkan a= 120.000 dan b= -5000

Dimasukan ke rumus : $S_n = \frac{1}{2}n[2a+(n-1)b]$ didapatkan:

$S_{24} = \frac{1}{2}x24[2x120.000+(24-1)(-5000)]$

= 12[240.000+(-115.000)]

= 12 [125.000]

= 1.500.000

Contoh 3.

Suatu bak mandi mempunyai panjang 3 m lebihnya dari lebar bak tersebut, sedangkan lebar 2 m kurangnya dari tinggi bak. Bila luas alas bak tersebut sama dengan 4 m^2, berapakah isi bak mandi tersebut?

Jawab:

Tahap pertama kita mengetahui bagaimana menghitung isi (volume) suatu bangun yang berbentuk bak mandi yang mempunyai panjang, lebar dan tinggi (bangun apakah itu?), yaitu bangun balok dan rumus Isi (Volume) adalah = p x l x t.

Tahap kedua mengenali besaran-besaran panjang, lebar, dan tinggi yang dibuat dalam kalimat tidak langsung. Disini kita coba memahami kalimat dengan cara membaca dari belakang, yaitu: "suatu bangun mempunyai luas alat 4 m^2 , mempunyai t, lebarnya = t – 2, dan panjangnya lebar + 3 atau (t – 2) + 3. Dan seterusnya kita sederhanakan seperti di bawah ini.

Diketahui:

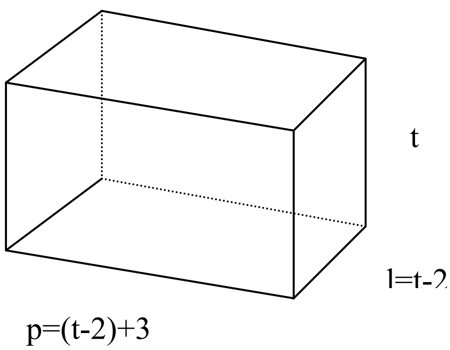
Luas = 4 m^2

tinggi = t

lebar = t - 2

panjang = (t - 2) + 3

Bila digambarkan sebagai berikut.



karena luas: p x l = 4

[(t-2)+3] x (t-2)= 4

(t+1) x (t-2) = 4

$t^2 – t - 2 = 4$

$t^2 – t - 6 = 0$

Sehingga: $t_1 = 3$ atau $t_2 = -2$ Jika diambil $t_1 = 3$ maka didapat panjang = 4, lebar = 1, dan tinggi =3

Dengan demikian: p x l x t = 4 x 1 x 3 =12 m^3

Jadi isi bak air tersebut = 12 m^3

Contoh 4.

Buktikan bahwa kuadrat bilangan genap adalah genap dan kuadrat bilangan ganjil adalah ganjil!

Jawab:

Ambil sembarang bilangan bulat misalnya m atau n, maka yang dimaksud dengan bilangan genap adalah 2m, sedangkan yang dimaksud dengan bilangan ganjil adalah 2m+1.

Kuadrat bilangan genap menjadi $(2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$. Karena m bilangan bulat, maka $2m^2$ suatu bilangan bulat pula. Sehingga $2(2m^2)$ dapat dikatakan sebagai bilangan genap. Jadi $(2n)^2$ merupakan bilangan genap.

Kuadrat bilangan ganjil menjadi $(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2m\,(m + 2) + 1$. Karena m adalah bilangan bulat maka 2m+2 adalah bulat pula, sehingga bilangan 2m (m + 2) + 1 merupakan bilangan ganjil. Jadi $(2m+1)^2$ merupakan bilangan ganjil.

Latihan 2

1. Anda dapat mengambil beberapa kasus, misalnya pada himpunan atau pada sistem bilangan.Perhatikan pernyataan-pernyataan aksioma berikut, kesimpulan apa yang dapat dibentuk dari aksioma-aksioma berikut.
   a. A_1 : Sesuatu yang sama dengan yang lain, satu sama lain sama
   b. A_2 : Penambahan sesuatu yang sama kepada sesuatu yang sama, hasilnya akan sama.
   c. A_3 : Keseluruhan lebih besar dari bagiannya.
2. Perhatikan pernyataan-pernyataan aksioma berikut, kesimpulan apa yang dapat dibentuk dari aksioma-aksioma berikut.
   A_1 : $a + b = c$
   A_2 : $d + e = f$
   A_4 : $(a + b) . (d + e) = g$
3. Bagaimana anda menggunakan sifat perkalian dalam bilangan cacah untuk soal seperti berikut.

25 x 18 x 8= ...
4. Untuk mendapatkan hasil kali dari 8 x 2683, bagaimana Anda melakukannya, mengapa?
5. Untuk soal 3 + 8 dengan 8 + 3 bagi siswa kelas I SD manakah yang soal dianggap lebih mudah, berikan alasannya.
6. Buktikan bahwa bilangan ganjil ditambah bilangan ganjil adalah bilangan genap.

Petunjuk Jawaban Latihan 2

1. Anda dapat mengambil beberapa kasus, misalnya pada himpunan atau sistem bilangan.
2. Anda dapat mensubstitusikan a + b = c dan d + e = f ke dalam c x f = g
3. Anda dapat memanfaatkan sifat komutatif dan asosiatif untuk menyelesaikan masalah ini.
4. Anda dapat memanfaatkan sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan untuk menyelesaikan masalah ini.
5. Anda dapat menggunakan sifat komutatif untuk mempermudah penyelesaian masalah ini.
6. Misalkan bilangan-bilangan ganjil itu adalah P = 2n -1 dan Q = 2m -1, dimana n, m adalah bilangan-bilangan asli sebarang..

Rangkuman

1. Penalaran deduktif penalaran merupakan proses penarikan kesimpulan yang berlangsung dari hal yang umum (generalisasi) ke hal yang khusus.
2. Di dalam membuktikan dengan penalaran deduktif, polanya diatur: (1) Kesimpulan didasarkan atas pernyataan generalisasi yang berlaku umum dan pernyataan khusus; (2) tidak menerima generalisasi dari hasil observasi seperti yang diperoleh dari penalaran induktif, (3) yang berperan dalam matematika adalah kebenaran suatu pernyataan haruslah didasarkan pada kebenaran pernyataan-pernyataan lain.
3. Penalaran induktif berperan penting dalam bidang non matematika, sedangkan penalaran deduktif berperan besar dalam bidang matematika.

Tes Formatif 2

1. Amir membeli dua keranjang jeruk dengan harga sepuluh ribu rupiah. Berapakah harga satu keranjang jeruk? Tanda kita menggunakan pola pikir matematis, soal tersebut diselesaikan dengan cara ...
   a. 5000 + 5000= 10.000
   b. 2 x 5000 = 10.000
   c. 2n = 10.000; n = 5.000
   d. 5000 x 2 = 10.000

2. Budi disuruh bapaknya untuk menghitung ubin (keramik) yang diperlukan untuk menutup lantai kamarnya. Ubin (keramik) yang akan dipasang adalah berukuran 30 cm dengan warna putih. Jika Budi telah belajar rumus luas persegi panjang di sekolah, maka kegiatan Budi adalah ...
   a. Budi membuat gambar petak-petak mirip ukuran ubin yang akan dipasang di lantai lantas menghitungnya, sehingga didapat jumlah ubin yang diperlukan.
   b. Budi mengambil kertas gambar lalu menggambar ubin-ubin dengan menggunakan skala 1 : 10 lantas menghitungnya sampai diketahui ubin yang diperlukan
   c. Budi menggunakan satu contoh ubin ukuran 30 cm lantas menutupnya satu-demi satu, sehingga didapat ubin yang diperlukan.
   d. Budi mengukur panjang dan lebar kamarnya dalam satuan cm, lantas panjang dan lebar tersebut dibagi dengan 30. Sehingga didapat panjangnya berapa ubin dan lebarnya berapa ubin lantas mengalikannya.

3. Dalam melakukan penjumlahan bilangan cacah sering kali kita menggunakan sifat-sifat penjumlahan bilangan cacah. Seperti "3 + 9 = ... ", Amin yang masih duduk di bangku kelas satu SD melakukan penjumlahan bilangan tersebut menjadi "9 + 3 = 12". Pendapat saya terhadap perbuatan perhitungan tersebut adalah ...
   a. Amin tidak perlu melakukan pertukaran posisi dua bilangan tersebut, sebab bilangan relatif kecil
   b. Nampaknya Amin mempermudah proses penjumlahan
   c. Tidak setuju, sebab sifat komutatif digunakan jika kita sudah mendapatkan jalan buntu dalam menjumlah suatu bilangan
   d. Boleh-boleh saja Amin melakukan penjumlahan demikian, sebab tidak ada yang melarang

4. Seorang petani ingin mengetahui keadaan luas sawahnya, maka yang harus dilakukannya adalah sebagai berikut **kecuali** ...

a. mengukurnya secara langsung untuk mendapatkan panjang dan lebarnya
b. membagi-bagi petakan menjadi bentuk-bentuk geometris, dan mengukurnya sesuai gambar yang dibuat.
c. menerapkan rumus-rumus luas yang sesuai dengan bentuk yang dibuat
d. menggunakan alat ukur sudut dan alat ukur panjang.

5. Seorang peternak ayam dan sapi tidak ingin ternaknya diketahui secara pasti. Ketika ada yang bertanya dengan pertanyaan “berapakah jumlah ayam dan sapi yang bapak miliki?”. Peternak menjawab “Ternak saya jumlah kepalanya ada 11 sedangkan kaki-kakinya ada 34”. Sehubungan dengan pernyataan peternak tersebut, maka jumlah ayam dan jumlah sapi dapat diketahui dengan menggunakan pendekatan sebagai berikut, kecuali ...
   a. dua variabel yang berbeda
   b. membuat dua persamaan
   c. melakukan subtitusi atau eliminasi pada dua persamaan yang dibuat
   d. bertanya lagi dengan pertanyaan yang lebih khusus.

6. Dalam penjumlahan bilangan bulat “4 + (-5)= ...” kita dapat melakukannya menjadi “[4 + (-4) + 1]= [4 + (-4)] + (-1) = (-1)”. Penjumlahan demikian termasuk sifat ...
   a. komutatif
   b. asosiatif
   c. Distributif
   d. Invers penjumlahan.

7. Dalam perhitungan keliling dan luas lingkaran kita menggunakan istilah “phi” dengan lambang p atau dengan pendekatan 3,14.... Phi tersebut didapatkan dari kegiatan sebagai berikut, kecuali
   a. membandingkan keliling lingkaran dengan garis tengahnya
   b. jiak ada keliling lingkaran 22 cm maka diameternya adalah 7 cm
   c. membagi keliling lingkaran dengan jari-jarinya
   d. hasil bagi keliling lingkaran oleh diameternya menunjuk bilangan 3,14...

8. Perhatikan pernyataan berikut:
   P_1 = Terdapat sekurang-kurangnya dua garis yang tidak berpotongan
   P_2 = satu garis memotong garis sejajar

   Dari pernyatan tersebut di atas dapat dibuat aksioma sebagai berikut, kecuali
   a. sudut yang bertolak belakang sama besar
   b. sudut-sudut yang sehadap sama besar

c. sudut-sudut dalam bersebrangan dan sudut-sudut luar bersebrangan sama besar

d. sudut-sudut dalam bersebrangan dan sudut-sudut luar bersebrangan tidak sama besar.

9. Dalam berpikir matematis, kita tidak diperkenankan untuk menerima suatu bgeneralisasi hasil dari coba-coba, sebab ...
   a. Ilmu matematika berbeda dengan ilmu lainnya
   b. Suatu genelaisasi harus dapat dibuktikan secara umum
   c. Matematika adalah ilmu berpikir
   d. Matematika ilmu induktif.

10. Suatu tabung berisi kerucut yang luas lingkarannya dan tingginya sama. Jika jari-jari lingkaran 5 cm dan tinggginya 10 cm, berapakah selisisih volume tabung dengan kerucutnya? Catatan $p = 3{,}14$
   a. 785 cm^3
   b. 523,33 cm^3
   c. 261,67 cm^3
   d. 261 cm^3

Balikan dan Tindak Lanjut

Cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir bahan ajar mandiri ini. Hitunglah jawaban Anda yang benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar .

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{5} \times 100\%$$

Makna dari tingkat penguasaan Anda adalah:

90% - 100% = Baik Sekali

80% - 89% = Baik

70% - 79% = Cukup

< 70% = Kurang

Kalau tingkat penguasaan Anda di atas 80 %, Anda dapat meneruskan ke Bahan ajar mandiri 2. Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80 %, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

Tes Formatif 1

1. B
2. C
3. D
4. D
5. A
6. D
7. C
8. A
9. A
10. A

Tes Formatif 2

1. C
2. D
3. B
4. A
5. D
6. D
7. C
8. D
9. B
10. B

PERNYATAAN

MODUL 3

PERNYATAAN

PENDAHULUAN

Modul ini menyajikan pernyataan dan nilai kebenaran. Modul ini merupakan bahan ajar kedua dari mata kuliah konsep dasar matematika. Modul ini terbagi ke dalam tiga kegiatan belajar. Kegiatan belajar 1 memuat tentang pernyataan dan operasinya, kegiatan belajar 2 memuat tentang tautologi, kontradiksi, dan kontingensi, dan kegiatan belajar 3 memuat tentang konvers, invers, dan kontrapositif.

Pernyataan dan nilai kebenaran tidak dapat dipisahkan dengan logika. Logika merupakan alat berpikir. Dalam logika dipelajari metode-metode dan prinsip-prinsip yang dapat dipakai untuk membedakan penalaran benar dan tidak benar. Sedangkan logika tidak dapat dipisahkan dari penalaran, yang dapat diartikan sebagai proses penarikan kesimpulan. Jadi dalam mempelajari pernyataan dan nilai kebenaran kita tidak dapat melepaskan diri penalaran.

Secara umum, setelah anda menyelesaikan modul ini diharapkan mampu memahami pernyataan beserta operasinya, dan mampu memahami tautologi, kontradiksi, dan kontingensi, dan mampu memahami konvers, invers, dan kontrapositif. Sedangkan secara khusus setelah anda mempelajari bahan ajar mandiri ini diharapkan dapat:

1. Menjelaskan pengertian pernyataan
2. Membuat tabel kebenaran biasa.
3. Membuat tabel kebenaran singakt.
4. Menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan.
5. Menentukan negasi dari suatu pernyataan.
6. Menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan majemuk.
7. Menentukan apakah sustu pernyataan merupakan tautologi, kontradiksi, atau kontingensi.
8. Menentukan invers suatu pernyataan.
9. Menentukan konvers suatu pernyataan.
10. Menentukan kontrapositif suatu pernyataan.

Agar Anda berhasil dengan baik dalam mempelajri modul ini, ikutilah petunjuk-petunjuk berikut ini.

1. Bacalah dengan baik pendahuluan modul ini sehingga Anda memahami tujuan mempelajari modul ini dan bagaimana mempelajarinya.
2. Bacalah bagian demi bagian materi yang ada dalam modul ini, kalau perlu tandai kata-kata / kaliamat yang dianggap penting. Ucapkan dalam bahasa sendiri kata/kaliamat yang ditandai tersebut.
3. Pahami pengertian demi pengertian dari isi modul ini dengan mempelajari contoh-contohnya, dengan pemahaman sendiri,dan berdiskusi dengan kawan mahasiswa atau orang lain.
4. Kerjakan soal-soal latihan dalam modul ini tanpa melihat petunjuk penyelesaiannya lebih dulu. Apabila mendapat jalan buntu, barulah Anda melihat petunjuk penyelesaiannya. Jawaban Anda tidak perlu sama dengan petunjuk yang diberikan, karena kadang-kadang banyak cara yang dapat kita lakukan dalam menyelesiakan suatu permasalahan.
5. Kerjakan soal-soal tes formatif untuk mengukur sendiri tingkat penguasaan anda akan isi modul ini.

Sebagai acuan utama penulisan modul ini adalah: (1) buku karangan Yaya S. Kusumah (1986), *Logika matematika Elementer,* dan (2) buku karangan Billstein, Liberskind, dan Lot (1993), *A Problem Solving Approach to Mathematics for School Teachers*. Sedangkan sebagai rujukan tambahan penulisan modul ini adalah buku-buku logika matematika yang banyak beredar di pasaran.

Pernyataan dan Operasi Pada Pernyataan

Pada dasarnya logika adalah ilmu yang mempelajari penalaran, yaitu apakah kesimpulan yang diperoleh dari pernyataan-pernyataan sebelumnya sesuai dengan aturan-aturan yang sah dan tidak. Suatu pernyataan harus dibedakan dari kalimat biasa. Tidak semua kalimat termasuk pernyataan. Kalimat biasa bisa merupakan perintah, pernyataan, atau kalimat yang kabur pengertiannya. Pernyataan diartikan sebagai kalimat matematika tertutup yang benar atau yang salah, tetapi tidak kedua-duanya dalam saat yang sama. Sedangkan kalimat yang tidak benar tidak salah adalah bukan pernyataan. Pernyataan biasanya dinyatakan dengan huruf kecil, misalnya: p, q, r, …

Contoh Pernyataan:
p : Gus Dur dan Megawati adalah orang yang pernah menjadi presiden Republik Indonesia
q : $5 + 3 = 8$
r : Manusia adalah yang makhluk hidup abadi di dunia.
s : Semarang adalah ibu kota Republik Indonesia
t : $50 – 15 = 23$

Contoh Bukan Pernyataan :
1. Sudahkah kamu makan ?
2. Selidiki orang itu !
3. $5x + 2 = 15$
4. Mudah-mudahan hari ini tidak hujan..
5. $a^2 + b^2 = c^2$

Pernyataan tunggal adalah pernyataan yang tidak memuat pernyataan lain sebagai bagiannya.

Contoh :
p: 2 adalah bukan bilangan prima..
q: Edi adalah anak pintar..
r: 3 adalah bilangan prima ganjil..

Pernyataan majemuk merupakan pernyataan yang diperoleh dari gabungan beberapa pernyataan tunggal. Sedangkan tiap pernyataan bagian dari pernyataan majemuk itu disebut komponen-komponen pernyataan majemuk. Komponen-komponen dari pernyataan majemuk itu tidak harus pernyataan tunggal, tetapi mungkin saja pernyataan majemuk. Untuk menggabungkan pernyataan-pernyataan tunggal menjadi pernyataan meajemuk dapat dipakai kata hubung atau kata perangkai yang disebut operasi-operasi logika matematika, baik operasi uner maupun biner.

Operasi uner pada pernyataan berupa operasi negasi, atau penyangkalan atau ingkaran. Operasi negasi merupakan operasi yang hanya berkenaan dengan satu unsur.

Contoh:
p : $5 + 4 \neq 10$
Negasi dari pernyataan tersebut adalah "Tidak benar $5 + 4 \neq 10$"
q : bujur sangkar adalah polygon
Negasi dari pernyataan tersebut adalah "Tidak benar bujur sangkar adalah polygon.

Operasi biner adalah operasi yang berkenaan dengan dua unsur. Dalam logika matematika operasi biner ini berkenaan dengan dua pernyataan. Ada 4 (empat) macam operasi biner yang akan dipelajari, yang merupakan operasi-operasi yang dapat membentuk pernyataan majemuk adalah sebagai berikut:

1. Konjungsi, dengan kata perangkai "dan"
2. Disjungsi dengan kata perangkai "atau"
3. Implikasi dengan kata perangkai "jika …, maka …"
4. Biimplikasi dengan kata perangkai " … jika dan hanya jika …"

Untuk lebih memahami bentuk pernyataan majemuk perhatikan beberapa contoh berikut:

1. Hasna anak rajin belajar dan rajin membantu orang tua.
2. Hari ini terjadi hujan atau panas.
3. 13 adalah bilangan prima dan ganjil.
4. Suatu segitiga adalah sama sisi jika dan hanya jika ketiga sudutnya sama besar.
5. Ibu membeli baju dan sepatu untuk adik.
6. Jika malam nanti cerah maka saya akan datang ke rumahmu.

Suatu pernyataan hanyalah bisa benar saja atau salah saja. Kebenaran atau kesalahan

dari suatu pernyataan disebut nilai kebenaran dari pernyataan itu. Untuk pernyataan yang mempunyai nilai benar diberi tanda dengan huruf capital B (benar), sedangkan pernyataan yang bernilai salah diberikan nilai kebenaran S (salah). Kata nilai kebenaran dilambangkan dengan "τ" (dibaca tau). Nilai kebenaran dari suatu pernyataan p ditulis, τ (p). Jika pernyataan p adalah benar, maka ditulis τ (p) = B, sedangkan jika pernyataan p itu salah, maka τ (p) = S.

Contoh 1

p : Megawati adalah Presiden ketiga Republik Indonesia.
Karena pernyataan tersebut merupakan pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran salah, nilai kebenaran pernyataan itu dapat ditulis dengan lambang τ (p) = S.

Contoh 2.

q : Bilangan asli mempunyai sifat tertutup terhadap operasi penjumlahan.
Karena pernyataan tersebut merupakan pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran benar, dengan demikian nilai kebenaran pernyataan itu, dapat ditulis dengan lambang τ (p) = B.
Dari dua contoh di atas tampak bahwa pada sebuah pernyataan mempunyai nilai kebenaran tunggal.

D. Operasi Uner

Dalam logika matematika terdapat operasi uner, yaitu berupa operasi negasi, atau yang disebut pula penyangkalan (ingkaran). Operasi negasi merupakan operasi yang hanya berkenaan dengan satu unsur, yaitu pernyataanlah sebagai unsurnya. Nilai kebenaran negasi sebuah pernyataan adalah kebalikan dari nilai kebenaran yang dimiliki oleh pernyataannya. Dengan demikian jika sebuah pernyataan mempunyai nilai kebenaran B (benar), maka negasinya adalah S nilai kebenarannya, dan begitu sebaliknya.

Contoh:

1. p : $5 + 5 = 25$
   Negasinya ditulis
   - p : $5 + 5 \neq 25$ atau
   - p : Tidak benar bahwa $5 + 5 = 25$
   Karena τ (p) = S, kita peroleh τ (- p) = B
2. q : $5 > 1$
   Negasinya ditulis
   – q : $5 \leq 3$ atau
   - q : Tidak benar bahwa $5 > 1$ atau
   Karena τ (q) = B, kita peroleh τ (- q) = S
3. r : Bilangan prima adalah bilangan ganjil.

Negasinya ditulis

˜r : Tidak benar bahwa bilangan prima adalah bilangan ganjil, atau :

Karena τ (r) = S, kita peroleh maka τ (-r) = B

Dari beberapa contoh di atas, tampak bahwa sebuah pernyataan dan ingkarannya mempunai nilai kebenaran saling berlawanan.

Operasi biner adalah operasi yang berkenaan dengan dua unsur. Dalam logika matematika operasi biner ini berkenaan dengan dua pernyataan. Ada 4 jenis operasi biner yang akan dipelajari, yaitu konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi.

1. Konjungsi

Dua pernyataan tunggal dapat digabungkan sehingga menjadi pernyataan majemuk dengan cara penggabungan tersebut dengan menggunakan kata "dan", yang dikenal dengan operasi "konjungsi". Konjungsi antara pernyataan p dan q dinyatakan dengan p $\wedge$ q.

Contoh :

a. Jika p: Malang adalah Ibu Kota Jawa Timur
   q: 2 + 9 = 11
   maka p $\wedge$ q: Malang adalah Ibu Kota Jawa Timur dan 2 + 9 = 11.
b. Jika p: 3 adalah bilanga prima ganjil.
   q: 2 adalah bilangan prima genap.
   Maka p $\wedge$ q: 3 adalah bilangan prima ganjil dan 2 adalah bilangan prima genap.
c. Jika r: Bujur sangkar termasuk poligon.
   s: Jajaran genjang termasuk poligon.

   Maka r $\wedge$ s: Bujur sangkar dan jajaran genjang termasuk poligon.

Suatu pernyataan majemuk sama seperti pernyataan tunggal mempunyai nilai kebenaran, benar atau salah tidak dua-duanya pada saat yang sama. Nilai kebenaran suatu pernyataan majemuk bergantung pada nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan asalnya. Jika p $\wedge$ q benar, maka p, q dua-duanya benar. Sebaliknya, jika salah satu dari p atau q salah, maka p $\wedge$ q salah.

2. Operasi Disjungsi

Suatu pernyataan majemuk yang terdiri dari dua pernyataan tunggal yang dihubungkan dengan kata "atau" disebut disjungsi. Disjungsi dilambangkan dengan $\vee$.

Disjungsi antara pernyataan p dan q dinyatakan dengan $p \vee q$.

Kata "atau" seringkali mempunyai dua arti yang berbeda. Pernyataan "$p \vee q$" bisa mempunyai arti p atau q, tetapi tidak kedua-duanya. Pengertian itu disebut juga "atau yang kuat" atau "memisah". Dalam kata latinnya disebut "out". Disjungsi tersebut dinamakan disjungsi eksklusif, dan ditulis dengan simbol $\underline{\vee}$. Di lain pihak mengatakan $p \vee q$ yang berarti p atau q, atau kedua-duanya. Pengertian itu disebut juga "atau lemah" atau "atau mencakup". Disjungsi tersebut dinamakan disjungsi inklusif, dan ditulis dengan simbol $\vee$.

Contoh:

a. Jika p : Ani sedang membaca buku.
   q : Ani sedang tidur.
   Maka $p \vee q$: Ani sedang membaca buku atau tidur.
b. Jika r : Televisi adalah alat visual.
   s : Televisi adalah alat audio.
   Maka $r \vee s$: Televisi adalah alat visual atau audio.
c. Jika t : 11 merupakan bilangan prima.
   u : 11 merupakan bilangan ganjil.
   Maka $t \vee u$: 11 merupakan bilangan prima atau bilangan ganjil.

Kata atau dalam contoh a berfungsi sebagai penghubung yang memisahkan pernyataan yang satu dari yang lain, yaitu memisahkan antara "membaca buku atau tidur", harus salah satu yang dilakukan oleh Ani, karena tidak mungkin dalam waktu yang sama Ani harus melakukan kedua-duanya. Jadi yang benar hanyalah satu dari kedua pernyataan pembentuknya, dan tidak kedua-duanya. Disjungsi seperti ini dinamakan disjungsi eksklusif.

Pada contoh b dan c masing-masing kedua pernyataannya benar, jadi bukan hanya salah satu saja, tetapi juga bisa kedua-duanya benar. Disjungsi ini dinamakan disjungsi inklusif.

Pada disjungsi eksklusif nilai kebenaran p atau q adalah benar, jika nilai kebenaran p dan q berbeda, salah jika p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama, atau paling sedikit satu unsurnya benar tetapi tidak kedua-duanya. Pada disjungsi inklusif nilai kebenaran p atau q adalah benar, jika salah satu dari p dan q adalah benar, atau kedua-duanya benar, dan salah dalam keadaan yang lainnya.

3. Implikasi

Dalam matematika sering ditemukan pernyataan-pernyataan dalam bentuk "jika

.... maka ....". Pernyataan dalam bentuk "jika .... maka ...." ini diperoleh dari penggabungan dua pernyataan tertentu. Misalnya dari pernyataan tunggal p dan pernyataan tunggal q, dibentuk kalimat baru merupakan pernyataan majemuk dalam bentuk "jika p maka q". Pernyataan-pernyataan demikian disebut implikasi, atau pernyataan-pernyataan bersyarat. Operasi implikasi dilambangkan dengan tanda ladam kuda $\supset$, atau tanda panah $\rightarrow$. Pernyataan "jika p maka q" dinyatakan dengan notasi $p \supset q$ atau $p \rightarrow q$.

Dalam pernyataan implikasi, komponen yang terletak diantara "jika dan maka", yaitu bagian kalimat yang lebih dulu menjadi syarat disebut anteseden. Komponen pernyataan yang ditulis kemudian, yaitu bagian belakang yang merupakan akibatnya atau mengikutinya disebut konsekwen.

Contoh:

a. Jika p : Pak Ali adalah seorang haji.
   q : Pak Ali adalah seorang muslim.
   Maka $p \rightarrow q$: Jika Pak Ali seorang haji, maka Pak Ali seorang muslim.
b. Jika r : Semua kucing suka makan ikan.
   s : Si Belang adalah seekor kucing.
   Maka $r \rightarrow s$: Jika semua kucing suka makan ikan, dan si Belang seekor kucing,maka si Belang suka makan ikan.
c. Jika t : Segitiga ABC samakaki.
   u : Segitiga ABC mempunyai dua sudut yang sama.
   Maka $t \rightarrow u$: Jika segitiga ABC samakaki, maka mempunyai dua sudut yangsama.

Kebenaran implikasi ini bukan persoalan logika atau definisi, tetapi konsekwennya merupakan akibat. Dalam implikasi terjadi hubungan sebab akibat dan harus diselidiki secara empiris.

Pernyataan $p \rightarrow q$ mempunyai nilai kebenaran benar (B), kecuali jika p adalah pernyataan yang benar (B), sedangkan q dalam keadaan yang salah (S). Jadi, suatu implikasi dengan anteseden benar dan konsekwen salah haruslah salah, selain dari pada itu mempunyai nilai kebenaran yang benar. Secara umum berlaku.

4. Biimplikasi

Dalam matematika sering dijumpai pernyataan yang mengandung istilah "jika dan hanya jika". Pernyataan ini dinamakan pernyataan biimplikasi atau bikondisional. Operasi biimplikasi atau bikondisional (biconditional), disebut juga operasi implikasi dwi (dua) arah, atau operasi ekivalensi.

Untuk membentuk pernyataan majemuk biimplikasi, diperlukan dua pernyataan

sebagai komponen-komponennya. Misalnya komponen pertama adalah pernyataan p dan komponen kedua adalah pernyataan q. Maka pernyataan majemuk "p ekivalen dengan q" atau p jika dan hanya jika q yang dilambangkan dengan "$p \leftrightarrow q$", mempunyai arti bahwa $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$. Sebagai konsekwensi logisnya $p \leftrightarrow q$ akan mempunyai nilai kebenaran yang benar hanya jika $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ kedua-duanya bernilai benar. Sedangkan implikasi $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ kedua-duanya akan benar hanya jika p benar dan q benar, atau p salah dan q salah, dalam keadaan lainnya tidak mungkin benar, jika p dan q nilai kebenarannya tidak sama, maka $p \rightarrow q$ dan $q \rightarrow p$ tidak akan saling menyampaikan, berarti kedua-duanya tidak akan benar.

Contoh :

a. Jika p : Dua garis saling berpotongan tegaklurus.
q : Dua garis saling membentuk sudut 90^{0}.
Maka $p \leftrightarrow q$: Dua garis saling berpotongan tegaklurus jika dan hanya jika kedua garis itu saling membentuk sudut 90^{0}.

b. Jika r : Indonesia anggota ASEAN
s : Filipina anggota ASEAN.
Maka $r \leftrightarrow s$: Indonesia anggota ASEAN jika dan hanya jika Filipina anggota ASEAN.

c. Jika t : x bilangan genap
u : x^{2} bilangan genap
Maka $t \leftrightarrow u$: x bilangan genap jika dan hanya jika x^{2} bilangan genap.

Tabel Kebenaran Pernyataan

a. Tabel Kebenaran biasa

Yang dimaksud dengan table kebenaran adalah suatu table yang memuat nilai kebenaran pernyataan-pernyataan tunggal atau pernyataan-pernyataan majemuk.

Untuk melengkapi table kebenaran pernyataan, harus diketahui dulu berapa banyak pernyataan yang termuat yang berlainan dalam table itu. Langkah ini diperlukan, agar tidak ada kemungkinan komposisi nilai kebenaran yang mungkin tak tertuliskan. Sebagai contoh, jika terdapat dua pernyataan yang berlainan , maka kemungkinannya adalah :

(1) Pernyataan pertama benar, pernyataan kedua benar.
(2) Pernyataan pertama benar, pernyataan kedua salah.
(3) Pernyataan pertama salah, pernyataan kedua benar.
(4) Pernyataan pertama salah, pernyataan kedua salah.

Dalam bentuk table kebenaran, keempat komposisi tersebut dapat dilihat di bawah ini :

p	q
B	B
B	S
S	B
S	S

Tabel di atas terdiri dari dua pernyataan tunggal yang berbeda, yaitu P dan Q. Nilai kebenaran kedua pernyataan tersebut dinyatakan dengan huruf B jika benar, dan dengan S jika salah. Dengan demikian, dari nilai kebenaran P dan nilai kebenaran Q, kita dapat membuat 4 buah pasang nilai kebenaran.

Dengan mengingat definisi operasi konjungsi (dan), disjungsi (dan), implikasi (jika .... maka), dan biimplikasi (jika dan hanya jika) antara pernyataan P dan Q, kita dapat membuat tabel kebenaran suatu pernyataan sebagai hasil dari operasi konjungsi, disjungsi, implikasi, biimplikasi, dan operasi-operasi campuran. Begitu juga dengan opersi campuran yang melibatkan negasi.

Berikut ini adalah beberapa sajian tabel kebenaran yang hanya melibatkan operasi tunggal dengan dua pernyataan P dan Q, yaitu konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi.

(1) Tabel Konjungsi

P	Q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

(2) Tabel Disjungsi Inklusif

P	Q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

(3) Tabel Disjungsi Eksklusif

P	Q	$p \veebar q$
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	S

(4) Tabel Implikasi

p	Q	$p \rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

(5) Tabel Biimplikasi

p	Q	$p \leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Jika diperhatikan, ternyata dua pernyataan mempunyai 4 kemungkinan komposisi. Jadi, banyaknya komposisi itu tergantung pada banyaknya pernyataan yang akan digabungkan. Secara umum berlaku jika banyaknya pernyataan ada n, maka banyaknya komposisi adalah 2^n.

b. Tabel Kebenaran Singkat.

Untuk membuat tabel kebenaran yang memuat lebih dari 3 pernyataan dalam bentuk yang cukup kompleks, untuk itu kita tidak perlu menggunakan tabel kebenaran biasa, tetapi kita dapat menggunakan tabel kebenaran singkat. Pasangan-pasangan (kombinasi) nilai kebenaran yang terjadi dari dari 3 pernyataan dapat ditentukan sebagai berikut:

Kemungkinan nilai kebenaran dari p, q, dan r masing-masing adalah B atau S. Jika nilai kebenaran p ditulis pada urutan pertama, nilai kebenaran q ditulis pada urutan ke dua, dan nilai kebenaran dari r ditulis pada urutan ke tiga, maka himpunan pasangan itu adalah:

{(B, B, B), (B, B, S), (B, S, B), (B, S, S), (S, B, B), (S, B, S), (S, S, B), (SSS)}

Jadi dari 3 pernyataan, kita dapat membuat 8 macam pasang nilai kebenaran. Bagaimana jika disajikan 4 pernyataan?

Contoh :

Periksa nilai kebenaran pernyataan berikut dengan tabel kebenaran singkat:

a. $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$

b. $[p \rightarrow (q \wedge r)] \wedge [-p \rightarrow (-q \wedge -r)]$

Jawab :

a. $(p \;\vee\; q) \;\wedge\; (r \;\vee\; s)$

(p	∨	q)	∧	(r	∨	s)
B	B	B	B	B	B	B
B	B	B	B	B	B	S
B	B	B	B	S	B	B
B	B	B	S	S	S	S
B	B	S	B	B	B	B
B	B	S	B	B	B	S
B	B	S	B	S	B	B
B	B	S	S	S	S	S
S	B	B	B	B	B	B
S	B	B	B	B	B	S
S	B	B	B	S	B	B
S	B	B	S	S	S	S
S	S	S	S	B	B	B
S	S	S	S	B	B	S
S	S	S	S	S	B	B
S	S	S	S	S	S	S

c. $[p \;\rightarrow\; (q \;\wedge\; r)\;] \;\wedge\; [\,-\,p \;\rightarrow\; (\,-\,q \;\wedge\; -\,r)]$

[p	→	(q	∧	r)]	∧	[-p	→	(-q	∧	-r)]
B	B	B	B	B	B	S	B	S	S	S
B	S	B	S	S	S	S	B	S	S	B
B	S	S	S	B	S	S	B	B	S	S
B	S	S	S	S	S	S	B	B	B	B
S	B	B	B	B	S	B	S	S	S	S
S	B	B	S	S	S	B	S	S	S	B
S	B	S	S	B	B	B	S	B	S	S
S	B	S	S	S	B	B	B	B	B	B

Latihan 1

1. Periksa apakah kalimat-kalimat di bawah ini merupakan pernyataan atau bukan pernyataan ?
   a. 51 adalah bilangan prima ganjil.
   b. Cepat selesaikanlah latihan ini !
   c. Jumlah besar sudut segiempat adalah 180^{0}

2. Manakah diantara pernyataan berikut yang merupakan pernyataan tunggal, dan manakah yang merupakan pernyataan majemuk ?
   a. Tidak semua ikan hidup di dalam air tawar.
   b. Operasi bagi pada bilangan real memenuhi sifat komutatif.
   c. Ali dan Ani kakak beradik.

3. Tentukan negasi dari tiap pernyataan berikut dan tentukan pula nilai kebenarannya.
   a. p : Ahmad menganggap matematika sukar.
   b. q : Kucing Ani mempunyai berbulu tebal.
   c. r : $50 - 15 \geq 25$

4. Tentukan apakah disjungsi berikut termasuk disjungsi inklusif atau disjungsi eksklusif. Nyatakanlah pula nilai kebenarannya.
   a. Trapesium termasuk segi empat atau poligon.
   b. 2 adalah bilangan genap atau bilangan prima.
   c. Konferensi Asia-Afrika diselenggarakan di Bandung atau Jakarta.

5. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk berikut:
   a. $(7 < 3) \rightarrow (7 + 2 < 3 + 2)$
   b. $(2 > 1) \leftrightarrow -(4 \neq 5)$
   c. Buatlah tabel kebenaran singkat untuk mengetahui nilai kebenaran pernyataan:
      $p \rightarrow [\, p \wedge -(q \vee r)\,]$

Petunjuk Jawaban Latihan

1. a. Periksa apakah kalimat itu mempunyai kebenaran tertentu.
   b. Sama seperti (a)
   c. sama seperti (a)
2. a. Periksa terdiri dari berapa buah pernyataan atau adakah pengaitnya.
   b. Sama seperti (a)
   c. Sama seperti (a)
3. a. Ingat arti negasi.

b. Sama seperti (a)
c. Sama seperti (a)

4. a. Ngat apakah keduanya benar atau hanya salah satu.
   b. Sama seperti (a)
   c. Sama seperti (a)
5. a. Ingat nilai kebenaran dari implikasi.
   b. Ingat nilai kebenaran dari biimplikasi.

c. Ingat nilai kebenaran dari negasi, konjungsi, disjungsi, dan implikasi, serta cara membuat tabel kebenaran.

Rangkuman

1. Pernyataan adalah kalimat matematika yang sudah jelas, sudah pasti benarnya atau salahnya dan tidak mempunyai dua arti. Sedangkan bukan pernyataan, yaitu kalimat yang belum mempunyai kepastian benar atau salah, yang kadang-kadang bisa berupa perintah, pertanyaan, atau beberapa kalimat yang belum lengkap atau bermakna ganda.
2. Pernyataan tunggal adalah kalimat sederhana yang hanya terdiri dari satu kalimat dan tidak mengandung pernyataan lain sebagai komponennya. Pernyataan majemuk adalah pernyataan yang mengandung pernyataan lain sebagai komponennya.
3. Setiap pernyataan hanyalah benar atau salah saja, oleh karena itu setiap pernyataan diberi nilai kebenaran benar (B) dan salah (S).
4. Operasi negasi adalah operasi monar dari operasi logika matematika yang fungsinya untuk membentuk pernyataan majemuk dari suatu pernyataan tunggal. Nilai kebenaran negasi selalu berlawanan dengan nilai kebenaran pernyataan aslinya.
5. Nilai kebenaran pernyataan majemuk konjungsi hanyalah benar, jika pernyataan-pernyataan asalnya yaitu konjung-konjungnya benar, dalam keadaan lainnya salah.
6. Pengertian disjungsi ada dua, yaitu disjungsi inklusif dan disjungsi eksklusif. Disjungsi inklusif adalah kata perangkai atau yang berarti salah satu atau dua-duanya dari disjung-disjungnya benar, maka nilainya adalah benar. Disjungsi eksklusif adalah benar hanya jika salah satu disjungnya benar tidak dua-duanya (memisah).
7. Kebenaran pernyataan implikasi pada dasarnya ada tiga macam. Pertama kebenaran yang didasarkan pada definisi, dan ketiga kebenaran yang didasarkan pada hubungan sebab akibat (empiris). Tetapi kebenaran-kebenaran tersebut mempunyai arti yang sama. Pernyataan implikasi akan bernilai salah, jika pernyataan antesedennya benar, sedangkan konsekwensinya salah, tetapi dalam keadaan lainnya benar.
8. Untuk dua buah pernyataan p dan q, maka pernyataan biimplikasinya "p jika dan hanya jika q" atau dinotasikan $p \leftrightarrow q$, yang berarti benar jika dan hanya jika p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama, dalam keadaan lainnya salah.
9. Langkah-langkah mencari nilai kebenaran dari pernyataan majemuk yang memuat berbagai operasi logika diadakan suatu aturan tertentu. Prioritas utama

langkah pengerjaan adalah operasi negasi, operasi konjungsi, disjungsi, implikasi, dan biimplikasi. Kecuali kalau ada tanda-tanda kurung tertentu yang meminta diprioritaskan. Dalam hal ini kurung kecil sebagai prioritas pengerjaan utama, dialnjutkan dengan kurung siku, kurung kurawal dan seterusnya.

TES FORMATIF 1

Petunjuk: Pilihlah salah satu jawaban yang dianggap paling tepat !

1. Yang bukan merupakan pernyataan adalah :
   a.. 2 anggota bilangan genap.
   b. Borobudur candi budha.
   c. Jika $x \in R$ maka $x^0 = 1$
   d. Ia guru matematika.

2. Pernyataan yang nilai kebenarannya benar adalah :
   a. Operasi tambah pada bilangan real tidak memenuhi sifat komutatif.
   b. Akar-akar dari persamaan $x^2 - x = 0$ adalah 0 dan 1.
   c. Bandung adalah ibukota RI.
   d. $x + 2 = x + 3$

3. Kalimat : " Tidak semua ikan hidup di air tawar " merupakan contoh :
   a. Pernyataan majemuk
   b. Pernyataan tunggal
   c. Bukan pernyataan
   d. a, b, c salah

4. Pernyataan berikut yang bukan negasi dari pernyataan : " $3 + 4 < 7$ " adalah :
   a. Tidak benar $3 + 4 < 7$
   b. $3 + 4 \geq 7$
   c. $3 + 4 < 7$
   d. $3 + 4 > 7$ atau $3 + 4 = 7$

5. Jika p : Semua bilangan asli merupakan bilangan real.
   q : Semua bilangan ganjil merupakan bilangan genap.
   maka diantara berikut yang merupakan negasi dari $(p \wedge q)$ adalah :
   a. $-(p \vee q)$
   b. $-p \wedge -q$
   c. $-p \vee q$
   d. $-p \vee -q$

6. Jika x : " Tiada siswa yang menyukai ujian "
   dan y : " $5 + 4 = 9$ ", maka diantara berikut yang benar adalah :
   a. $-(-x \wedge -y)$
   b. $-x \wedge -y$

c. $-(x \wedge y)$
d. $x \wedge -y$

7. Jika r : " Matematika merupakan ilmu yang penting ".
   s : " Matematika diajarkan di sekolah dasar ".
   Maka kalimat dari simbol logika $s \vee -r$ adalah :
   a. Matematika diajarkan di SD atau Matematika bukan ilmu penting.
   b. Matematika tidak diajarkan di SD atau Matematika bukan ilmu penting.
   c. Matematika tidak diajarkan di SD atau matematika ilmu penting.
   d. Matematika diajarakan di SD atau matematika ilmu penting.

8. Misalkan ditentukan : " Jika ayah pergi, maka saya ada di rumah ", maka diantara berikut yang benar adalah :
   a. Jika saya pergi, maka ayah pergi.
   b. Jika saya pergi, maka ayah ada di rumah.
   c. Jika ayah ada di rumah, maka saya pergi.
   d. a, b, dan c salah.

9. Jika A dan B adalah pernyataan-pernyataan yang benar, maka pernyataan majemuk yang benar adalah :
   a. $(A \vee -B) \wedge -A$
   b. $(A \wedge -B) \vee B)$
   c. $(A \vee -B) \wedge (-A \vee -B)$
   d. $(-A \wedge B) \vee (B \wedge -A)$

10. $\tau\, [\, (p \rightarrow (q \vee -q)\,]$ adalah :
   a. B B B B
   b. B S B S
   c. B B B S
   d. S S B B

Tindak Lanjut dan Balikan

Cocokkan jawaban anda dengan kunci jawaban tes formatif 1 yang ada pada bagian belakang modul ini. Hitunglah jawaban anda yang benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap modul ini.

Rumus:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Banyak jawaban anda yang benar}}{10} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan:

90 % - 100 % = Baik sekali

80 % - 89 % = Baik

70 % - 79 % = Cukup

< 69 % = Kurang

Jika anda mencapai tingkat penguasaan 80 % ke atas, anda dapat meneruskan belajar ke Kegiatan Belajar 2. Bagus! Akan tetapi jika tingkat penguasaan anda masih di bawah 80 % maka anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1 ini, terutama pada bagian yang belum anda kuasai.

Tautologi, Kontradiksi, Kontingensi, Konvers, Invers, dan Kontrapositif

1. Tautologi, Kontradiksi, dan Kontingensi

Tautologi

Pernyataan majemuk merupakan rentetan pernyataan yang memuat tanda pengait. Pada ,saat membuat tabel kebenaran pernyataan majemuk yang memuat dua atau lebih pernyataan tunggal yang berlainan, terlihat adanya nilai B dan S yang terkombinasi dalam kolom-kolom tertentu. Kita sering menemukan hal-hal yang istimewa, misalnya menemukan sebuah pernyataan yang semua nilai kebenarannya B atau S.

Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut ini!
1. p : Columbus menemukan benua Amerika.
2. p v – p: "Columbus menemukan benua Amerika atau tidak menemukan benuaAmerika".

Kedua pernyataan di atas mempunyai nilai kebenaran yang benar, tetapi kebenarannya ditemukan dalam cara-cara yang berlainan. Nilai kebenaran pernyataan (p) adalah persoalan sejarah, dan harus dipelajari melalui penelitian empiris, akan tetapi nilai kebenaran pernyataan majemuk (p v – p) dapat diketahui secara logika. Nilai kebenaran pernyataan (p v – p) adalah sebuah kebenaran formal (formal truth). Pernyataan ini merupakan tautologi. Pernyataan yang semua nilai kebenarannya adalah benar (B) tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponen pembentuknya dinamakan tautologi. Dengan demikian, sebuah bentuk pernyataan majemuk yang nilai kebenarannya selalu benar tanpa memperhatikan komponen-komponen pembentuknya dinamakan sebuah tautologi. Untuk memeriksa nilai kebenaran (p v – p) kita dapat menggunakan sebuah tabel kebenaran dan memperhatikan semua kemungkinan nilai kebenaran yang akan muncul. Untuk itu perhatikan tabel kebenaran berikut ini.

P	- p	P v – p
B S	S B	B B

Dari tabel di atas kita dapat melihat bahwa nilai kebenaran pernyataan majemuk p v – p mempunyai selau benar meskipun komponen pembentuknya ada yang mempunyai nilai kebenaran salah. Secara umum, sebuah pernyataan majemuk dinamakan **tautologi**, jika ni lai kebenaran pernyataannya adalah benar dalam segala hal, tanpa memandang nilai kebenaran dari komponen-komponennya.

Kontradiksi

Sebuah pernyataan majemuk tidak harus mempunyai nilai kebenaran benar untuk segala hal. Bisa jadi pernyataan majemuk itu mempunyai justru mempunyai nilai kebenaran salah untuk segala hal. Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut ini!

1 p : Obama adalah presiden pertama Amerika Serikat..
2. p ∧ – p : Obama adalah presiden pertama Amerika Serikat dan bukan presiden pertama Amerika Serikat".

Kita mengetahui bahwa pernyataan ke dua di atas mempunyai nilai kebenaran salah dan kebenaran dari pernyataan itu ditemukan dalam cara-cara yang berlainan. Nilai kebenaran pernyataan (p) adalah suatu kenyataan sejarah, karena memang kenyataan empirik menunjukkan bahwa Obama adalah bukan presiden pertama Amerika Serikat. Nilai kebenaran pernyataan majemuk (p ∧ – p) dapat ditentukan secara logika. Nilai kebenaran pernyataan (p ∧ – p) adalah sebuah kebenaran formal (formal truth) dengan nilai kebenarannya salah. Pernyataan ini merupakan kontradiksi, karena semua nilai kebenaran yang muncul adalah salah (S) tanpa memandang nilai kebenaran komponen-komponen pembentuknya dinamakan kontradiksi. Dengan demikian, sebuah bentuk pernyataan majemuk yang nilai kebenarannya selalu salah tanpa memperhatikan komponen-komponen pembentuknya dinamakan sebuah kontradiksi. Untuk memeriksa nilai kebenaran (p ∧ – p) kita dapat menggunakan sebuah tabel kebenaran dan memperhatikan semua kemungkinan nilai kebenaran yang akan muncul. Untuk itu perhatikan tabel kebenaran berikut ini.

P	- p	p ∧ – p
B S	S B	S S

Dari tabel di atas kita dapat melihat bahwa nilai kebenaran pernyataan majemuk p ∧ – p mempunyai selau salah meskipun komponen pembentuknya ada yang mempunyai nilai kebenaran benar. Secara umum, sebuah pernyataan majemuk dinamakan **kontradiksi**, jika nilai kebenaran pernyataannya adalah salah dalam segala hal, tanpa memandang nilai kebenaran dari komponen-komponennya.

Kontingensi

Sebuah pernyataan majemuk tidak harus mempunyai nilai kebenaran selau benar atau selau untuk segala hal. Bisa jadi pernyataan majemuk itu mempunyai mempunyai nilai kebenaran benar pada suatu situasi dan mempunyai nilai kebenaran salah pada situasi lain. Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut ini!

1. p: Besok pagi ibu membeli kueh coklat.
2. q: Besok pagi ibu membeli mainan untuk Budi.
3. p ∧ q:: Besok pagi ibu membeli kueh coklat atau Besok pagi ibu membeli mainan untuk Budi.

Kita mengetahui bahwa pernyataan pertama mempunyai dua kemungkinan nilai kebanaran, yaitu benar atau salah. Begitu pula dengan pernyataan kedua, mempunyai dua kemungkinan nilai kebenaran, yaitu benar atau salah. Sedangkan. Nilai kebenaran dari pernyataan ketiga ditemukan harus berdasarkan pada nilai kebenaran yang ada pada pernyataan pertama dan nilai kebenaran yang ada pada pernyataan kedua. Untuk menentukan nilai kebenaran pernyataan ketiga itu kita dapat mem perhatikan tabel kebenaran berikut ini.

p	Q	p ∧ q
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

Dari tabel di atas kita dapat melihat bahwa nilai kebenaran pernyataan majemuk p ∧ q mempunyai nilai kebenaran yang tidak selau salah dan juga tidak selalu benar. Pernyataan majemuk yang mempunyai nilai kebenaran seperti pada pernyataan ketiga itu dinamakan kontingensi. Secara umum, sebuah pernyataan majemuk dinamakan **kontingensi,** jika nilai kebenaran pernyataannya merupakan kumpulan dari nilai benar dan salah, di luar tautologi dan kontradiksi.

Contoh :

Periksalah menggunakan tabel kebenaran apakah bentuk-bentuk pernyataan berikut adalah tautologi, kontradiksi, dan kontingensi!

1. $[(p \rightarrow q) \wedge (- q \vee r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$
2. $[(- p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow - q)] \wedge r$
3. $(p \wedge q) \wedge - (p \vee q)$

Jawab.

1. $[(p \rightarrow q) \wedge (- q \vee r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

[(p	→	Q)	∧	(- q	∨	r)]	→	(p	→	r)
B	B	B	B	S	B	B	B	B	B	B
B	B	B	S	S	S	S	B	B	S	S
B	S	S	S	B	B	B	B	B	B	B
B	S	S	S	B	B	S	B	B	S	S
S	B	B	B	S	B	B	B	S	B	B
S	B	B	S	S	S	S	B	S	B	S
S	B	S	B	B	B	B	B	S	B	B
S	B	S	B	B	B	S	B	S	B	S

Karena τ $[(p \rightarrow q) \wedge (- q \vee r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ = BBBBBBBB, yaitu berisi huruf "B" semuanya, maka pernyataan majemuk ini adalah sebuah tautologi. Untuk menyatakan nilai kebenaran sebuah tautologi bisa digunakan satu huruf "B" saja. Jadi notasi τ $[(p \rightarrow q) \wedge (- q \vee r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ = B, berarti bentuk $[(p \rightarrow q) \wedge (- q \vee r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$ adalah sebuah tautologi.

2. $[(- p \rightarrow r) \vee (p \rightarrow - q)] \wedge r$

[(- p	→	r)	∨	(p	→	- q)]	∧	r
S	B	B	S	B	S	S	S	B
S	B	S	S	B	S	S	S	S
S	B	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	B	B	B	S	S
B	B	B	B	S	B	S	B	B
B	S	S	B	S	B	S	S	S
B	B	B	B	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S	S

Karena τ [(- p → r) ∨ (p → - q)] ∧ r = SSBSBSBS, berarti tidak B semua dan tidak S semua tetapi kombinasi diantara B dab S, maka bentuk pernyataan

[(- p → r) ∨ (p → - q)] ∧ r adalah bukan tautologi dan bukan kontradiksi, tetapi sebuah kontingensi.

3. (p ∧ q) ∧ - (p ∨ q)

(p	∧	Q)	∧	-	(p	∨	q)
B	B	B	S	S	B	B	B
B	S	S	S	S	B	B	S
S	S	B	S	S	S	B	B
S	S	S	S	B	S	S	S

Karena τ (p ∧ q) ∧ - (p ∨ q) = SSSS, atau τ (p ∧ q) ∧ - (p ∨ q) = S, berarti bentuk pernyataan (p ∧ q) ∧ - (p ∨ q) adalah sebuah kontradiksi.

Implikasi Logis dan Ekivalensi Logis

Bila p dan q adalah bentuk-bentuk pernyataan dan untuk pernyataan implikasi p → q merupakan suatu tautologi, maka p → q dinamakan implikasi logis. Hal ini berarti bahwa implikasi logis dari pernyataan implikasi p → q, yaitu p → q haruslah memenuhi syarat bahwa nilai kebenaran dari implikasi p → q adalah benar, artinya B semua untuk berbagai kemungkinan nilai kebenaran pernyataan p dan pernyataan q.

Contoh :

1. Selidiki bentuk pernyataan majemuk :
   [(p → q) ∧ p] → p. Apakah pernyataan ini merupakan implikasi logis atau bukan dapat dilihat dalam tabel kebenaran berikut :

p)]	→	(q	∧	[P	→	p
B	B	B	B	B	B	B
B	S	S	S	B	B	B
S	B	B	S	S	B	S
S	B	S	S	S	B	S

Karena τ [(p $\rightarrow$ q) $\wedge$ p] $\rightarrow$ p = BBBB = B untuk berbagai kemungkinan

τ (p) dan τ (q), maka bentuk pernyataan tersebut merupakan implikasi logis, dan dinotasikan p $\rightarrow$ q.

2. Apakah pernyataan berikut merupakan pernyataan majemuk implikasi logis ?
   a. p $\vee$ (p $\wedge$ q) $\rightarrow$ p

   b. – p $\wedge$ q $\rightarrow$ p

Jawab :

Nilai kebenaran dari tiap bentuk pernyataan majemuk di atas akan diselidiki dengan tabel kebenaran berikut :

a. p $\vee$ (p $\wedge$ q) $\rightarrow$ p

p	$\vee$	(p	$\wedge$	Q]	$\rightarrow$	p
B	B	B	B	B	B	B
B	B	B	S	B	B	B
S	S	S	S	S	B	S
S	S	S	S	S	B	S

Karena τ [p $\vee$ (p $\wedge$ q) $\rightarrow$ p] = BBBB = B, p $\vee$ (p $\wedge$ q) $\rightarrow$ p merupakan implikasi logis.

b. – p $\wedge$ q $\rightarrow$ p

-p	P	$\wedge$	Q	$\rightarrow$	P
S	B	S	B	B	B
S	B	S	S	B	B
B	S	B	B	S	S
B	S	S	S	B	S

Karena τ [(– p $\wedge$ q $\rightarrow$ p)] = BBSB (tidak B semua), berarti bentuk pernyataan – p $\wedge$ q $\rightarrow$ p bukan tautologi, sehingga – p $\wedge$ q $\rightarrow$ p bukan implikasi logis.

Selanjutnya akan dibahas pernyataan majemuk biimplikasi p $\leftrightarrow$ q. Untuk bentuk-bentuk pernyataan p dan q, sehingga pernyataan biimplikasi p $\leftrightarrow$ q merupakan suatu

tautologi untuk semua kemungkinan nilai kebenaran p dan q, maka disebut p ekivalensi logis q dan dinotasikan $p \leftrightarrow q$.

Contoh :
Selidiki dengan menggunakan tabel kebenaran, apakah pernyataan-pernyataan majemuk berikut merupakan ekivalensi logis ?

1. $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$
2. $- p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$

Jawab :
1. $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$

P	$\vee$	(p	$\wedge$	Q)	$\leftrightarrow$	P
B B S S	B B B S	B B S S	B S S S	B S B S	B B B B	B B S S

Karena τ [$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$] = BBBB, tanpa memandang τ (p) dan τ (q), bentuk pernyataan tersebut merupakan ekivalensi logis atau $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$.

2. $- p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$

-	P	$\vee$	(p	$\wedge$	q)	$\leftrightarrow$	p
S S B B	B B S S	B S B B	B B S S	B S S S	B S B S	B S S S	B B S S

Karena τ [$- p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$] = BSSS (tidak B semua), berarti [$- p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$] bukan tautologi, sehingga bentuk pernyataan majemuk [$- p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$] bukan ekivalensi logis.

2. Konvers, Invers, dan Kontrapositif

Konvers

Pada bagian sebelumnya kita telah mempelajari pernyataan majemuk berupa pernyataan kondisional $p \rightarrow q$, dengan p sebagai anteseden dan q sebagai konsekwen. Pada bagian ini kita akan membahas konvers dari suatu pernyataan majemuk yang berbentuk pernyataan kondisional. Perhatikan contoh berikut:

Jika Pak Hasan seorang haji maka ia seorang muslim.

Pernyataan di atas merupakan pernyataan kondisional. Kalimat ”Pak Hasan seorang haji” merupakan anteseden, dan kalimat ”ia seorang muslim” merupakan konsekwennya. Sekarang perhatikan pernyataan berikut:

Jika Pak Hasan seorang muslim maka ia seorang haji.

Pernyataan” Jika Pak Hasan seorang muslim maka ia seorang haji” dinamakan konvers dari pernyataan ” Jika Pak Hasan seorang haji maka ia seorang muslim”, Seperti telah kita ketahui bahwa bentuk pernyataan kondisional dinotasikan $p \rightarrow q$. Bentuk pernyataan $q \rightarrow p$ disebut “konvers” dari pernyataan kondisional $p \rightarrow q$. Konvers dari suatu pernyataan kondisional diperoleh dengan cara menukarkan anteseden menjadi konsekwen, baik sebagai tempat kedudukan maupun sebagai perannya.

Nilai kebenaran sebuah konvers, tidak tergantung pada nilai kebenaran pernyataan kondisionalknya. Kebenaran suatu konvers tergantung pada kebenaran hubungan dianatara anteseden dan konsekwennya.

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh-contoh berikut :

a. Pernyataan : Jika dua garis saling tegaklurus, maka kedua garis itu membentuk sudut siku-siku.
   Konvers : Jika dua garis membentuk sudut siku-siku, maka dua garis saling tegaklurus.
b. Pernyataan: Jika $x = 0$, maka $xy = 0$
   Konvers : Jika $xy = 0$, maka $x = 0$
c. Pernyataan: Jika dua buah sudut adalah siku-siku, maka kedua sudut itu sama besar.
   Konvers : Jika kedua sudut itu sama besar, maka dua buah sudut itu siku- siku.

Dari contoh-contoh di atas, suatu pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran benar tidak menjamin nilai kebenaran konversnya. Nilai kebenaran dari pernyataan kondisional (a) adalah benar, dan konversnya juga benar. Sedangkan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan (b) dan (c) adalah benar, tetapi konversnya ternyata salah..

Contoh :

a. Pernyataan: Jika bilangan berakhir nol, maka bilangan itu habis dibagi 5.

Konvers : Jika bilangan habis dibagi 5, maka bilangan itu berakhir nol.

b. Pernyataan: Jika bilangan habis dibagi 5, maka bilangan itu tidak berakhir dengan nol.

Konvers : Jika bilangan tidak berakhir dengan nol, maka bilangan itu habis dibagi 5.

Pada contoh (b) misalkan bilangan-bilangan itu diganti dengan bilangan yang habis dibagi 5, tetapi tidak berakhir dengan nol, contohnya 15. Jika 15 habis dibagi dengan 5, maka 15 adalah bilangan yang berakhir dengan nol, merupakan pernyataan kondisional yang salah. Jadi konversnya (kebalikannya) salah, tanpa menghiraukan ada beberapa banyak contoh yang benar yang dapat kita temukan.

c. Pernyataan: Jika x kelipatan 9, maka x kelipatan 3.

Konvers : Jika x kelipatan 3, maka x kelipatan 9.

Dengan demikian konvers dari pernyataan kondisional $p \rightarrow q$ adalah $q \rightarrow p$

Invers

Seperti pada pembahasan konvers, pada bagian ini kita akan mulai dengan contoh sebuah pernyataan kondisional berikut ini:

Jika Pak Hasan seorang haji maka ia seorang muslim.

Selanjutnya perhatikan pernyataan berikut:

Jika Pak Hasan bukan seorang haji maka ia bukan seorang muslim.

Pernyataan" Jika Pak Hasan bukan seorang haji maka ia bukan seorang muslim" dinamakan invers dari pernyataan " Jika Pak Hasan seorang haji maka ia seorang muslim". Jika pernyataan kondisional ditulis $p \rightarrow q$ maka pernyataan $- p \rightarrow - q$ disebut "invers" dari pernyataan kondisional itu. Nilai kebenaran suatu invers tidak tergantung pada nilai kebenaran pernyataan kondisionalknya. Kebenaran suatu konvers tergantung pada kebenaran hubungan dianatara anteseden dan konsekwennya.

Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh-contoh berikut :

a. Pernyataan : Jika dua garis saling tegaklurus, maka kedua garis itu membentuk sudut siku-siku.

Invers : Jika dua garis tidak saling tegak lurus, maka kedua garis itu tidak membentuk sudut siku-siku.

b. Pernyataan: Jika $x = 0$, maka $xy = 0$

Konvers : Jika $x \neq 0$, maka $xy \neq 0$

c. Pernyataan: Jika dua buah sudut adalah siku-siku, maka kedua sudut itu sama besar.

Konvers : Jika dua buah sudut adalah tidak siku-siku, maka kedua sudut itu tidak sama besar.

Dari contoh-contoh di atas, suatu pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran benar tidak menjamin nilai kebenaran inversnya. Nilai kebenaran dari pernyataan kondisional (a) adalah benar, dan inversnya juga benar. Sedangkan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan (b) dan (c) adalah benar, tetapi inversnya ternyata salah..

Contoh :

a. Pernyataan: Jika bilangan berakhir nol, maka bilangan itu habis dibagi 5.
   Invers : Jika bilangan tidak berakhir nol, maka bilangan itu tidak habis dibagi 5.
b. Pernyataan: Jika bilangan habis dibagi 5, maka bilangan itu tidak berakhir dengan nol.
   Invers : Jika bilangan tidak habis dibagi 5, maka bilangan itu berakhir dengan nol.
c. Pernyataan: Jika x kelipatan 9, maka x kelipatan 3.
   Invers : Jika x bukan kelipatan 9, maka x bukan kelipatan 3.

   Jika $p \rightarrow q$ adalah sebuah bentuk pernyataan kondisional, maka bentuk pernyataan $- p \rightarrow - q$ dinamakan invers dari pernyataan implikasi $p \rightarrow q$. Jadi invers dari suatu pernyataan implikasi, diperoleh dengan cara memberikan penyangkalan kepada anteseden dan konsekwennya. Nilai kebenaran dari pernyataan implikasi tidak menjamin nilai kebenaran inversnya.

Kontrapositif

Seperti pada pembahasan konvers dan invers, pada bagian ini kita akan mulai dengan contoh sebuah pernyataan kondisional berikut ini:

Jika Pak Hasan seorang haji maka ia seorang muslim.

Selanjutnya perhatikan pernyataan berikut:

Jika Pak Hasan bukan seorang muslim maka ia bukan seorang haji.

Pernyataan" Jika Pak Hasan bukan seorang muslim maka ia bukan seorang haji" dinamakan kontrapositif dari pernyataan " Jika Pak Hasan seorang haji maka ia seorang muslim". Jika pernyataan kondisional ditulis $p \rightarrow q$ maka pernyataan $- q \rightarrow - p$ disebut "kontrapositif" dari pernyataan kondisional itu. Nilai kebenaran suatu kontrapositif tergantung pada nilai kebenaran pernyataan kondisionalknya. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh-contoh berikut :

a. Pernyataan : Jika dua garis saling tegaklurus, maka kedua garis itu membentuk sudut siku-siku.
   Kontrapositif: Jika kedua garis tidak membentuk sudut siku-siku maka dua garis itu

tidak saling tegak lurus.

b. Pernyataan: Jika $x = 0$, maka $xy = 0$

Kontrapositif: Jika $xy \neq 0$, maka $x \neq 0$

c. Pernyataan: Jika dua buah sudut adalah siku-siku, maka kedua sudut itu sama besar.

Kontrapositif: Jika dua sudut tidak sama besar.maka dua buah sudut adalah t i d a k siku-siku.

Dari contoh-contoh di atas, suatu pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran benar menjamin nilai kebenaran kontrapositifnya benar, dan suatu pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran salah menjamin nilai kebenaran kontrapositifnya juga salah.

Contoh :

a. Pernyataan: Jika bilangan berakhir nol, maka bilangan itu habis dibagi 5.

Kontrapositif: Jika bilangan tidak habis dibagi 5.maka bilangan itu tidak berakhir nol.

b. Pernyataan: Jika bilangan habis dibagi 5, maka bilangan itu tidak berakhir dengan nol.

Kontrapositif: Jika bilangan itu berakhir dengan nol.maka bilangan tidak habis dibagi 5.

c. Pernyataan: Jika x kelipatan 9, maka x kelipatan 3.

Kontrapositif: Jika x bukan kelipatan 3, maka x bukan kelipatan 9.

Jika dari suatu bentuk pernyataan $p \rightarrow q$, anteseden dan konsekwennya saling ditukarkan dan diberikan penyangkalan, maka didapat suatu kontrapositif dari implikasi semula, dan dinotasikan dengan $-q \rightarrow -p$.

Hubungan diantara pernyataan kondisional, konvers, invers, dan kontrapositif dapat disimpulkan sebagai berikut :

(1) pernyataan : $p \rightarrow q$

(2) konvers : $q \rightarrow p$

(3) invers : $-p \rightarrow -q$

(4) kontrapositif : $-q \rightarrow -p$

Tabel kebenaran pernyataan, implikasi, konvers, invers dan kontrapositif dapat dilihat sebagai berikut :

p	q	-p	-q	$P \to q$	$q \to p$	$- p \to - q$	$- q \to -p$
B B S S	B S B S	S S B B	S B S B	B S B B	B B S B	B B S B	B S B B

Dari tabel di atas bahwa nilai kebenaran pernyataan implikasi (kondisional) sama dengan kontrapositifnya, sedangkan nilai kebenaran invers sama dengan konvers. Dengan demikian kita dapat menuliskan kesamaan nilai kebenaran di atas sebagai berikut:

(i) $(p \to q) \equiv (- q \to - p)$
(ii) $(q \to p) \equiv (- p \to - q)$

Latihan 2

1. Periksa dengan tebel kebenaran, apakah pernyataan berikut ini merupakan tautologi, kontradiksi, atau kontingensi.
   a. $((p \vee q) \wedge {}^{\sim} p) \to q$
   b. $p \wedge (q \wedge {}^{\sim} p)$
2. Periksa dengan tabel kebenaran, apakah pernyataan berikut termasuk implikasi logis, ekuivalensi logis, atau bukan keduanya.
   a. $p \to ({}^{\sim} p \wedge q)$
   b. $p \leftrightarrow ((q \vee p) \vee {}^{\sim} q)$
3. Tentukan konvers, invers, dan kontrapositif dari pernyataan
   . $(p \wedge q) \to (r \vee s)$

Petunjuk Jawaban Latihan 2

1 a. Anda harus menentukan dahulu berapa banyak pasang nilai kebenaran jika ada 2 pernyataan p dan q. Selanjutnya anda harus ingat apa yang dimaksud tautologi, kontradiksi dan kontingensi. Jika pada tabel kebenaran hasilnya bernilai benar (B)semua maka pernyataan itu merupakan tautologi, jika bernilai salah (S) semua maka pernyataan itu merupakan kontradiksi, dan jika memuat nilai benar (B) dan salah (S) maka pernyataan itu merupakan kontingensi.

1 b. Serupa dengan cara 1a.

2 a. Anda harus ingat apa yang dimaksud implikasi logis dan ekuivalensi logis. Jika suatu pernyataan implikasi merupakan tautologi maka pernyataan itu dikatakan sebagai implikasi logis. Begitu pula dengan ekuivalensi logis, jika suatu pernyataan

biimplikasi merupakan tautologi maka pernyataan itu dinamakan ekuivalensi logis.

2 b. Serupa dengan cara 2a.

3. Anda harus ingat bahwa suatu pernyataan kondisional $p \rightarrow q$ mempunayi konvers $q \rightarrow p$, mempunyai invers $\sim p \rightarrow \sim q$ dan mempunyai kontrapositif $\sim q \rightarrow \sim p$

Rangkuman

1. Sebuah pernyataan majemuk dinamakan tautologi, jika ni lai kebenaran pernyataannya adalah benar dalam segala hal, tanpa memandang nilai kebenaran dari komponen-komponennya.
2. Sebuah pernyataan majemuk dinamakan kontradiksi, jika nilai kebenaran pernyataannya adalah salah dalam segala hal, tanpa memandang nilai kebenaran dari komponen-komponennya.
3. Sebuah pernyataan majemuk dinamakan kontingensi, jika nilai kebenaran pernyataannya merupakan kumpulan dari nilai benar dan salah, di luar tautologi dan kontradiksi.
4. Konvers dari pernyataan kondisional $p \rightarrow q$ adalah $q \rightarrow p$.
5. .Invers dari pernyataan kondisional $p \rightarrow q$ adalah $\tilde{}p \rightarrow \tilde{}q$.
6. Kontrapositif dari pernyataan $p \rightarrow q$ adalah $\tilde{}q \rightarrow \tilde{}p$.
7. Nilai kebenaran suatu kontrapositif sama dengan nilai kebenaran dari pernyataan kondisionalnya.
8. Jika suatu pernyataan kondisional adalah tautologi maka pernyataan itu merupakan suatu implikasi logis.

Tes Formatif 2

Petunjuk: Pilihlah salah satu jawaban yang dianggap paling tepat !

1. Pernyataan ”$p \wedge \sim p$” merupakan
   a. Tautologi
   b. Kntradiksi.
   c. Kontingensi.
   d. Implikasi logis.

2. Pernyataan ”$p \vee \sim p$” merupakan
   a. Tautologi
   b. Kontradiksi.
   c. Kontingensi.
   d. Implikasi .

3. Pernyataan ”$p \vee q$” merupakan
   a. Tautologi
   b. Kntradiksi.
   c. Kontingensi.
   d. Implikasi logis.

4. Pernyataan ” $(p \vee q) \rightarrow q$” merupakan
   a. Tautologi
   b. Kntradiksi.
   c. Kontingensi.
   d. Implikasi logis.

5. Pernyataan ” $(p \wedge q) \rightarrow q$” merupakan
   a. Tautologi
   b. Kntradiksi.
   c. Kontingensi.
   d. a, b, dan c salah.

6. Pernyataan ” $(p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$ ” merupakan
   a. Tautologi
   b. Kntradiksi.
   c. Kontingensi.
   d. a, b, dan c salah.

7. Suatu pernyataan kondisional mempunyai nilai kebenaran sama dengan
   a. Invers.
   b. Konvers.
   c. Kontrapositif.
   d. a, b, dan c salah.

8. . Pernyataan " $(p \wedge q) \rightarrow q$" mempunyai konvers
   a. $(p \wedge q) \rightarrow q$
   b. $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim q$
   c. $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim q$
   d. a, b, dan c salah

9. Pernyataan " $(p \vee q) \rightarrow q$" mempunyai invers
   a. $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim q$
   b. $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim q$
   c. $\sim q \rightarrow (p \wedge q)$
   d. a, b, dan c salah

10. Pernyataan "$p \rightarrow (p \wedge q)$ " mempunyai kontrapositif
   a. $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim q$
   b. $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim p$
   c. $\sim q \rightarrow (p \wedge q)$
   d. a, b, dan c salah

Balikan dan Tindak Lanjut

Cocokkan jawaban anda dengan kunci jawaban tes formatif 1 yang ada pada bagian belakang modul ini. Hitunglah jawaban anda yang benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap modul ini.

Rumus:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Banyak jawaban anda yang benar}}{10} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan:

90 % - 100 %	= Baik sekali
80 % - 89 %	= Baik
70 % - 79 %	= Cukup
< 69 %	= Kurang

Jika anda mencapai tingkat penguasaan 80 % ke atas, anda dapat meneruskan belajar ke Kegiatan Belajar 2. Bagus! Akan tetapi jika tingkat penguasaan anda masih di bawah 80 % maka anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1 ini, terutama pada bagian yang belum anda kuasai.

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

Tes Formatif 1

1. c
2. b
3. b
4. c
5. d
6. a
7. a
8. d
9. b
10. a

Tes Formatif 2

1. b
2. a
3. c
4. c
5. b
6. a
7. c
8. d
9. a
10. b

MODUL 4

ARGUMEN DAN KUANTOR

ARGUMEN DAN KUANTOR

PENDAHULUAN

Logika adalah dasar dan alat berpikir yang logis dalam matematika. Logika tidak dapat dilepaskan dari penalaran, sehingga dapat membantu dan memberikan bekal tambahan untuk menyampaikan pelajaran di sekolah. Dalam logika dipelajari metode-metode dan prinsip-prinsip yang dapat dipakai untuk membedakan cara berpikir benar atau tidak benar, sehingga dapat membantu menyatakan ide-ide yang lebih tepat. Jadi dalam logika dipelajari tentang kebenaran dan kesalahan dari penalaran, serta penarikan kesimpulan dari sebuah atau serangkaian pernyataan..

Argumen dan kuantor merupakan bagian dari logika matematika. Serangkaian kalimat pernyataan yang memuat kesimpulan sering dikatakan sebagai argumen. Sedangkan kuantor sangat erat hubungannya dengan kuantifikasi, baik kuantifikasi yang bersifat eksistensial atau kuantor khusus maupun kuantifikasi yang bersifat universal atau kuantor umum.

Modul ini merupakan bahan ajar ke empat dari mata kuliah konsep dasar matematika.. Modul ini terbagi kedalam dua kegiatan belajar. Kegiatan belajar 1 memuat tentang argumen, kegiatan belajar 2 memuat tentang kuantor.

Secara umum, setelah anda menyelesaikan modul ini diharapkan mampu memahami bentuk-bentuk pernyataan atau rangkaian pernyataan beserta operasinya, mampu memahami berbagai penarikan kesimpulan dalam berbagai argumen, dan mampu memahami pernyataan-pernyataan yang memuat kuantor, baik kuantor universal, kuantor eksistensial, maupun negasi dari suatu kuantor. Sedangkan secara khusus setelah anda mempelajari bahan ajar mandiri ini diharapkan dapat:

1. Mengidentifikasi apakah suatu rangkaian pernyataan merupakan argumen atau bukan argumen.
2. Membuktikan validitas suatu argumen
3. Membuat konklusi dari serangkaian pernyataan.
4. Merumuskan pengertian kuantor.
5. Menentukan apakah suatu pernyataan memuat kuantor atau tidak.
6. Menetukan jenis-jenis kuantor
7. Menentukan nilai kebenaran pernyataan yang berkuantor
8. Menentukan negasi dari suatu pernyataan yang berkuantor

9. Menentukan nilai kebenaran dari negasi pernyataan berkuantor.

Agar Anda berhasil dengan baik dalam mempelajri modul ini, ikutilah petunjuk-petunjuk berikut ini.

1. Bacalah dengan baik pendahuluan modul ini sehingga Anda memahami tujuan mempelajari modul ini dan bagaimana mempelajarinya.
2. Bacalah bagian demi bagian materi yang ada dalam modul ini, kalau perlu tandai kata-kata / kaliamat yang dianggap penting. Ucapkan dalam bahasa sendiri kata/kaliamat yang ditandai tersebut.
3. Pahami pengertian demi pengertian dari isi modul ini dengan mempelajari contoh-contohnya, dengan pemahaman sendiri,dan berdiskusi dengan kawan mahasiswa atau orang lain.
4. Kerjakan soal-soal latihan dalam modul ini tanpa melihat petunjuk penyelesaiannya lebih dulu. Apabila mendapat jalan buntu, barulah Anda melihat petunjuk penyelesaiannya. Jawaban Anda tidak perlu sama dengan petunjuk yang diberikan, karena kadang-kadang banyak cara yang dapat kita lakukan dalam menyelesiakan suatu permasalahan.
5. Kerjakan soal-soal tes formatif untuk mengukur sendiri tingkat penguasaan anda akan isi modul ini.

Sebagai acuan utama penulisan modul ini adalah: (1) buku karangan Yaya S. Kusumah (1986), *Logika matematika Elementer,* dan (2) buku karangan Billstein, Liberskind, dan Lot (1993), *A Problem Solving Approach to Mathematics for School Teachers*. Sedangkan sebagai rujukan tambahan penulisan modul ini adalah buku-buku logika matematika yang banyak beredar di pasaran.

Argumen

Pengertian Argumen

Sebelum kita membahas lebih jauh tentang argumen, perhatikan serangkaian pernyataan berikut ini.

a.. Rangkaian pernyataan 1.
(1) Jika Bilangan dan logika diperlukan maka semua mahasiswa belajar matematika.
(2) Bilangan dan logika diperlukan.
Jadi, semua mahasiswa belajar matematika.

b. Rangkaian pernyataan 2.
(1) Jika puasa adalah kewajiban maka dengan puasa kita akan memperoleh pahala.
(2) Jika puasa adalah kebutuhan maka dengan puasa kita akan memperoleh kenikmatan.
(3) Puasa adalah kewajiban atau kebutuhan.
Jadi dengan puasa kita akan memperoleh pahala atau kenikmatan.

Rangkaian kalimat di atas merupakan kalimat yang disusun dengan menggunakan nomor-nomor dan diakhiri dengan kesimpulan. Rangkaian kalimat yang memuat kesimpulan seperti di atas merupakan argumen. Argumen merupakan rangkaian pernyataan-pernyataan yang mempunyai pernyataan ”penarikan kesimpulan”. Dengan demikian, di dalam argumen terdapat kata-kata, seperti jadi, maka, oleh karena itu, dan semacamnya. Argumen terdiri dari pernyataan-pernyataan yang terbagi atas dua kelompok, yaitu kelompok pernyataan “sebelum kata jadi” yang disebut premis-premis (hipotesis), dan kelompok lain yang hanya terdiri dari satu pernyataan yang disebut konklusi. Sebuah konklusi diturunkan secara logis dari hipotesis-hipotesis. Sebuah argumen dikatakan valid jika kebenaran konjungsi pernyataan pada premis mengakibatkan kesimpulan yang benar. Jika kebenaran pernyataan-pernyataan pada premis tidak menghasilkan kesimpulan yang benar, maka argumen itu invalid. Argumen

yang invalid sering disebut sesat pikir. Perhatikan beberapa contoh berikut ini.

Contoh 1:
p : Jika hari hujan
q : Jalan licin
Argumen : $p \rightarrow q$: Jika hari hujan, maka jalan licin (hipotesis 1)
$\underline{p\quad\quad}$: Hari hujan (hipotesis 2)
Kesimpulan $\therefore q$: Karena itu jalan licin
Argumen di atas dapat disimpulkan dengan kondisional.

Contoh 2
Jika kita makan nasi satu piring maka perut kita kenyang, dan jika kita minum air jeruk satu gelas maka badan kita segar. Jadi kita makan nasi satu piring dan minum air jeruk satu gelas maka perut kita kenyang dan badan kita segar.

Misalkan,
A: Kita makan nasi satu piring;
B: Perut kita kenyang;
C: Kita minum air jeruk satu gelas;
D: badan kita segar.
Argumen di atas dapat kita nyatakan dengan menggunakan simbol-simbol sebagai berikut:
$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)$.
$\therefore (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)$.

Inferensi Induksi

Perhatikan sebuah argumen berikut:

Semua siswa MI yang saya lihat berpakaian seragam putih merah.

Saya melihat sangat banyak siswa MI.

Jadi, semua siswa MI berpakaian seragam putih merah.

Jika kita perhatikan tampak bahwa argumen di atas tampak sebagai argumen yang baik. Hal ini terjadi karena sekilas tampak bahwa premis-premisnya memberi akibat logis terhadap konklusinya. Jika kita perhatikan lebih cermat, kalimat ”saya melihat sangat banyak siswa MI” adalah suatu pernyataan yang mengandung arti ”belum semua siswa MI saya lihat”. Akibatnya, konklusi yang diambil berdasarkan premis-premisnya mungkin bernilai benar atau mungkin pula bernilai salah. Inferensi dari premis menuju konklusi yang hanya berdasarkan atas kemungkinan saja dinamakan **inferensi induksi**, argumennya dinamakan argumen induktif.

Perhatikan contoh argumen berikut.

Semua pasangan suami-istri yang saya lihat hidup berbahagia.

Saya melihat banyak pasangan suami-istri.

Jadi, semua pasangan suami-istri hidup berbahagia.

Argumen ini juga termasuk inferensi induksi (mengapa?)

Inferensi Deduksi

Kita perhatikan argumen berikut:
Semua mahluk hidup akan mati.
Pak Ahmad adalah mahluk hidup.
Jadi, Pak Ahmad akan mati.

Argumen di atas mempunyai premis-premis yang benar dan konklusi yang diambil juga benar karena tidak ada kemungkinan terjadi yang lain. Tidak mungkin terjadi ”Pak Ahmad tidak akan mati” jika kenyataannya semua mahluk hidup akan mati dan pak Ahmad adalah mahluk hidup. Inferensi dari premis menuju konklusi yang tepat, tidak didasarkan atas kemungkinan dinamakan **inferensi induksi**, argumennya dinamakan argumen deduktif.

Berikut ini adalah beberapa contoh argumen deduktif.

Contoh 1

Jika terdengar suara adzan subuh adik bangun dari tempat tidurnya.

Terdengar suara adzan subuh.

Jadi, adik bangun dari tempat tidurnya.

Contoh 2

Hujan sangat lebat dan petir menyambar-nyambar di angkasa.

Jadi, hujan sangat lebat.

Contoh 3

Adik pergi ke toko buku atau pergi ke perpustakaan.

Adik tidak pergi ke toko buku.

Jadi, adik pergi ke perpustakaan.

Dari beberapa contoh di atas, jelaslah bahwa pada argumen deduktif, premisnya benar-benar mengakibatkan terjadinya konklusi yang pasti; sedangkan pada argumen

induktif premisnya mengakibatkan terjadinya konklusi yang belum pasti, masih berupa kemungkinan. Hal yang perlu diperhatikan pada argumen deduktif adalah relasi antara premis-premis dan konklusinya. Bisa saja premisnya merupakan pernyataan yang isinya salah atau mungkin benar. Untuk itu perhatikan contoh berikut.

Jika Pak Amin orang kaya maka Pak Amin mungkin akan berbagi kepada semasa.

Ternyata Pak Amin orang kaya.

Jadi, Pak Amin mungkin akan berbagi kepada sesama.

Pada contoh di atas, konklusinya merupakan kemungkinan. Meskipun demikian, arumen tersebut adalah argumen deduktif, karena premisnya benar-benar mengakibatkan terjadinya konklusi yang benar.

Validitas Argumen

Misal diberikan pernyataan majemuk $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$. Pernyataan majemuk ini merupakan argumen, dan argumen ini merupakan tautologi. Karena tautologi, argumen ini valid atau sahih, dan dapat dibuktikan dengan tabel kebenaran (silahkan buat tabel kebenarannya).

Pada umumnya argumen deduktif yang benar (valid) diartikan sebagai argumen yang mempunyai premis-premis benar dan konklusi benar. Anggapan seperti ini tidak benar, karena banyak argumen yang mempunyai premis benar dan konklusi benar tetapi argumen tersebut salah. Ada pula argumen yang mempunayi premis dan konklusi salah tetapi merupakan argumen yang benar. Perhatikan contoh-contoh berikut ini.

Contoh 1.

Budiman adalah seorang anak laki-laki.

Banyak artis yang kawin-cerai.

Jadi, guru adalah pahlawan tanpa tanda jasa.

Argumen di atas tidak ada artinya. Jika kita perhatikan secara sermat, ternyata premis-premisnya benar dan konklusinya juga benar. Meskipun demikian argumen tersebut salah karena konklusinya tidak mengikuti premis-premisnya, atau dengan kata lain premis-premisnya tidak mengakibatkan terjadinya konlusi.

Contoh 2

Semua persegipanjang adalah segiempat.

Segitiga adalah persegipanjang.

Jadi, segitiga adalah segiempat.

Argumen di atas mempunyai premis salah, yaitu segitiga adalah persegipanjang. Meskipun demikian, argumen ini merupakan argumen deduktif yang benar, dan biasa disebut sebagai argumen valid.

Deduksi yang terdapat pada argumen valid disebut dengan deduksi valid. Validnya sebuah deduksi tidak tergantung pada kebenaran-pernyataan-pernyataan yang membentuknya, tetapi konklusinya merupakan akibat logis dari premis-premisnya.

Perhatikan argumenargumen berikut ini.
Argumen 1
Semua manusia perlu makan.
Andi adalah manusia.
Jadi, Andi perlu makan.

Argumen ini jelas merupakan argumen valid, karena secara intuitif kita jelas membenarkan argumen ini.

Argumen 2
Semua artis laki-laki berwajah ganteng.
Mandra adalah artis laki-laki.
Jadi Mandra berwajah ganteng.

Argumen kedua ini bentuknya sama seperti argumen pertama dan merupakan argumen valid juga. Secara intuitif kita sukar melihat validitas argumen ini, karean premisnya salah. Secara sistematis, kedua argumen tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

Semua A adalah B.
Andi adalah A.
Jadi Andi adalah B

Argumen ini masih tetap berlaku meskipun kata ”Andi” diganti dengan orang lain, selain ”Mandra” atau oarang lain lagi. Dengan demikian secara simbol kedua argumen di atas dapat dapat dinyatakan dengan:

Semua A adalah B.
C adalah A.
Jadi C adalah B.
Perhatikan argumen berikut.
Budi sekarang ada di Jakarta atau di Bandung.

Budi tidak ada di Jakarta.
Jadi, Budi ada di Bandung.
Argumen ini termasuk argumen deduktif valid. Pernyataan simbolnya adalah
p atau q.
Bukan p.
Jadi, q
Misalkan: p menyatakan Budi ada di Jakarta.
q menyatakan Budi ada di Bandung.
Argumen ini dapat diubah bentuknya menjadi

$p \vee q$
$\sim p$
$\therefore q$

Cara lain untuk mengetahui validitas sebuah argumen deduktif adalah dengan menggunakan tabel kebenaran. Sebelum membuat tabel kebenaran kita harus menentukan dahulu bentuk kondisionalnya yang berkorespondensi dengan argumen tersebut. Langkah selanjutnya adalah memeriksa dengan tabel kebenaran apakah pernyataan kondisional $(p \vee q) \rightarrow p$ ini tautologi atau bukan. Jika pernyataan ini adalah suatu tautologi, berarti argumen tersebut adalah argumen valid. Setiap argumen selau berkorespondensi dengan suatu bentuk korespondensi tertentu. Perhatikan beberapa contoh berikut ini.

Contoh1.
Misalkan kita mempunyai argumen sebagai berikut.
p
q
$\therefore q$
Argumen ini berkorespondensi dengan pernyataan kondisional
$(p \wedge q) \rightarrow p$

Langkah selanjutnya adalah memeriksa dengan tabel kebenaran apakah pernyataan kondisional $(p \wedge q) \rightarrow p$ ini tautologi atau bukan.

(p	$\wedge$	q)	$\rightarrow$	p
B	B	B	B	B
B	S	S	B	B
S	S	B	B	S
S	S	S	B	S

Karena pernyataan kondisional ini merupakan suatu tautologi, berarti argumen tersebut adalah argumen valid.

Contoh 2

Periksa validitas argumen:

$q \rightarrow r$

$p \rightarrow q$

$\therefore\ p \rightarrow r$

Jawab.

Pernyataan kondisional yang berkorespondensi dengan argumen di atas adalah

$((q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

((q	→	r)	∧	(p	→	q))	→	(p	→	r)
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
B	S	S	S	B	B	B	B	B	S	S
S	B	B	S	B	S	S	B	B	B	B
S	B	S	S	B	S	S	B	B	S	S
B	B	B	B	S	B	B	B	S	B	B
B	S	S	S	S	B	B	B	S	B	S
S	B	B	B	S	B	S	B	S	B	B
S	B	S	B	S	B	S	B	S	B	S

Karena pernyataan kondisional ini merupakan suatu tautologi, berarti argumen tersebut adalah argumen valid.

Aturan Penarikan Kesimpulan

Kita dapat cepat membuktikan validitas argumen dengan menggunakan tabel kebenaran jika pernyataan yang termuat di dalam argumen itu hanya dua atau tiga buah. Jika pernyataan-pernyataannya banyakkita dapat menggunakan cara lain yang lebih singkat yang dapat kita gunakan untuk membuktikan validitas argumen adalah "menurunkan" konklusi dari premis-premisnya menggunakan beberapa argumen yang telah diketahui valid. Sebagai contoh, perhatikan argumen berikut:

$\sim A \vee \sim B$

$\sim\sim A$

$\therefore \sim B$

Apakah argumen ini valid?

Jawab

Kita telah mengetahui bahwa argumen berikut ini adalah argumen valid.

$p \vee q$

$\sim p$

$\therefore q$

Dengan melakukan substitusi ~A untuk p dan ~B untuk q kita dapat menyimpulkan bahwa

$\sim A \vee \sim B$

$\sim\sim A$

$\therefore \sim B$

merupakan argumen Merupakan argumen valid.

Terdapat banyak aturan yang dapat digunakan dalam proses penarikan kesimpulan. Beberapa aturan itu adalah sebagai berikut:

1. Modus Ponen / MP

   Perhatikan argumen berikut:

   (1) Jika hari libur tiba banyak orang pergi ke Puncak.

   (2) Jika banyak orang pergi ke Puncak maka jalur Puncak macet

   (3) Hari libur tiba.

   Jadi, jalur Puncak macet.

   Kita dapat menyatakan argumen itu dengan simbol-simbol, yaitu sebagai berikut:

   $p \rightarrow q$

   $q \rightarrow r$

   p

   $\therefore r$

   Argumen di atas merupakan argumen valid (silahkan buktikan dengan tabel kebenaran).

   Perhatikan bentuk argumen berikut:

   $p \rightarrow q$

   p

   $\therefore q$

   Bentuk argumen seperti ini dinamakan modus ponen disingkat MP.

   Dengan menggunakan MP akan kita membuktikan validitas argumen di atas.

   1. $p \rightarrow q$ (premis / Pr)

   2. $q \rightarrow r$ (Pr)

   3. p (Pr)

$\therefore$ r

Bukti:

1. p $\rightarrow$ q (premis / Pr)
2. q $\rightarrow$ r (Pr)
3. p (Pr)
4. q 1, 3, MP
5. r 2, 4, MP

2. Modus Tollen / MT

Perhatikan bentuk argumen berikut:

p $\rightarrow$ q

~q

$\therefore$ ~ p

Bentuk argumen ini disebut modus tollen, atau disingkat MT

Sekarang perhatikansebuah argumen berikut, kemudian buktikan validitasnya.

1. p $\rightarrow$ q (Pr)
2. q $\rightarrow$ r (Pr)
3. ~ r (Pr)

$\therefore$ ~p

Bukti.

1. p $\rightarrow$ q (Pr)
2. q $\rightarrow$ r (Pr)
3. ~ r (Pr)
4. ~ q (3, 2, MT)
5. ~ p (4, 1, MT)

3. Simplifikasi / Simp.

Kita ingin mengubah bentuk suatu suatu pernyataan menjadi lebih sederhana sehingga dapat membantu dalam melakukan pemeriksaan validitas sebuah argumen.

Perhatikan argumen berikut.

Aminah dan Aisyah pergi ke madrasah.

Jadi, Aminah pergi ke madrasah

Secara simbol, argmen simplifikasi dapat dinyatakan dalam bentuk

p $\wedge$ q

$\therefore$ p

Contoh.

Jika Aminah pergi mengaji maka Aisyah pergi mengaji..

Aminah dan Azizah pergi ke mengaji.

Jadi, Aisyah pergi mengaji.
Argumen tersebut valid dan bentuknya adalah

. 1. $p \rightarrow q$
2. $p \wedge r$
$\therefore$ q

Bukti.
1. $p \rightarrow q$ (Pr)
2. $p \wedge r$ (Pr)
3. p (2, Simpl)
4. q (1, MP)

4. Addisi / Add

Addisi merupakan argumen yang dapat dinyatakan dengan simbol sebagai berikut:

p
$\therefore$ $p \vee q$

Validitas argumen ini dapat diperiksa dengan tabel kebenaran, yang didahului dengan membuat pernyataan kondisionalnya. Pernyataan kondisional untuk argumen ini adalah

$p \rightarrow (p \vee q)$

Karena tautologi (coba periksa!), pernyataan kondisional ini valid.Akibatnya, argumen di atas merupakan argumen valid.

Contoh.
1. $(p \vee q) \rightarrow r$ (Pr)
2. $s \rightarrow p$ (Pr)
3. s (Pr)
$\therefore$ r

Bukti.
1. $(p \vee q) \rightarrow r$ (Pr)
2. $s \rightarrow p$ (Pr)
3. s (Pr)
4. p (3, 2, MP)
5. $p \vee q$ (4, Add)
6. r (5, 1, MP)

5. Hypothetical Syllogism / HS

Hypothetical Syllogism merupakan argumen yang dinyatakan dengan simbol:

$p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

$\therefore\ p \rightarrow r$

Contoh.

Buktikan validitas argumen

$p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

$r \rightarrow s$

$\therefore\ p \rightarrow s$

Jawab.

1. $p \rightarrow q$ (Pr)
2. $q \rightarrow r$ (Pr)
3. $r \rightarrow s$ (Pr)
4. $p \rightarrow r$ (1, 2, HS)
5. $p \rightarrow s$ (4, 3, HS)

6. Disjunctive Syllogism / DS

Disjunctive Syllogism merupakan argumen yang dinyatakan dengan simbol:

$p \vee q$

$\sim p$

$\therefore\ q$

Contoh.

Buktikan validitas argumen

$A \vee B$

$\sim A \wedge C$

$\therefore$ B

Bukti.

. 1. A $\vee$ B (Pr)

2. ~A $\wedge$ C (Pr)

3. ~A (2, Simp)

4. B (1, 3, DS)

7. Constructive Dilemma / CD

Constructive Dilemma merupakan argumen yang dinyatakan dengan simbol:

$p \rightarrow q$

$r \rightarrow s$

$p \vee r$

$\therefore q \vee s$

Contoh.

Buktikan validitas argumen

$p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

$s \rightarrow t$

$p \vee s$

$\therefore r \vee t$

Bukti.

1. $p \rightarrow q$ (Pr)
2. $q \rightarrow r$ (Pr)
3. $s \rightarrow t$ (Pr)
4. $p \vee s$ (Pr)
5. $p \rightarrow r$ (1, 2, HS)
6. $r \vee t$(5, 3, 4, C D)

8. Destructive Dilemma / DD

Constructive Dilemma merupakan argumen yang dinyatakan dengan simbol:

$p \to q$

$r \to s$

$\sim q \vee \sim s$

$\therefore \sim p \vee \sim r$

Contoh.

Buktikan validitas argumen

$p \to q$

$q \to r$

$s \to t$

$\sim r \vee \sim t$

$\therefore \sim p \vee \sim s$

Bukti.

1. $p \to q$ (Pr)
2. $q \to r$ (Pr)
3. $s \to t$ (Pr)
4. $\sim r \vee \sim t$ (Pr)
5. $p \to r$ (1, 2, HS)
6. $\sim p \vee \sim s$ (5, 3, 4, DD)

Aturan Penukaran

Kita telah mengenal beberapa aturan penarikan kesimpulan untuk membuktikan validitas sebuah argume. Namun demikian, masih terlalu banyak argumen yang tidak dapat kita buktikan validitasnya jika kita hanya mengandalkan aturan-aturan itu. Kita masih memerlukan aturan lain yang dapat membantu kita dalam membuktikan validitas argumen-argumen lain. Meskipun belum lengkap, berikut ini disajikan beberapa aturan yang disebut aturan penukaran.

1. De Morgan (de M)
   a. $-(p \wedge q) \equiv (-p \vee -q)$.
   b. $-(p \vee q) \equiv (-p \wedge -q)$.
2. Negasi Rangkap (NR)
   $-(-p) \equiv p$.
3. Tautologi (Taut)
   a. $p \equiv (p \vee p)$
   b. $p \equiv (p \wedge p)$
4. Eksportasi (Exp)

$((p \wedge q) \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

5. Komutatif (Kom)
   a. $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
   b. $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
6. Asosiatif (As)
   a. $(p \vee (q \vee r)) \equiv (p \vee (q \vee r))$
   b. $(p \wedge (q \wedge r)) \equiv (p \wedge (q \wedge r))$
7. Distributif (Dis)
   a. $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
   b. $(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
8. Transposisi (Trans)
   $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$
9. Implikasi Material (Imp)
   $(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$
10. Ekuivalensi Material (Ekuiv)
    a. $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$
    b. $(p \leftrightarrow q) \equiv ((p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q))$

Pernyataan-pernyataan di atas saling ekuivalen sehingga kita dapat menukar pernyataan sebelah kiri dengan pernyataan sebelah kanan.

Contoh.

Buktikan validitas argumen berikut.

$(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$

$\sim C$

$\therefore \sim B$

Bukti.

1. $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$ (Pr)
2. $\sim C$ (Pr)
3. $\sim C \vee \sim D$ (1, Add)
4. $\sim (C \wedge D)$ (3, de M)
5. $\sim (A \vee B)$ (4, 1, MT)
6. $\sim A \wedge \sim B$ (5, de M)
7. $\sim B$ (6, Simp)

Validitas argumen di atas dapat pula diperiksa dengan menggunakan tabel kebenaran yang didahului dengan merubah bentuk argumen itu menjadi pernyataan kondisional. Pernyataan kondisional dari argumen itu adalah

$(((A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)) \wedge \sim C) \rightarrow \sim B$

Selanjutnya silahkan coba membuat tabel kebenarannya. Jika dari tabel kebenaran menunjukkan bahwa pernyataan itu adalah tautologi, maka pernyataan itu valid. Hal ini berarti bahwa argumennya juga valid.

Latihan 1

Untuk meningkatkan kemampuan penguasaan anda terhadap materi yang ada pada kegiatan belajar ini, coba anda kerjakan soal-soal berikut ini.

1. Periksa validitas argumen-argumen ini dengan menggunakan tabel kebenaran.
   a. p

      $\therefore\ p \vee q$

   b. $p \rightarrow q$

      p

      $\therefore\ q$

   c. $p \rightarrow q$

      $\sim q$

      $\therefore \sim p$

   d. $p \rightarrow q$

      $q \rightarrow r$

      $\therefore\ p \rightarrow r$

2. Periksa validitas argumen-argumen ini dengan menggunakan sifat atau aturan penarikan kesimpulan.
   a. $(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$

      $\sim C$

      $\therefore \sim B$

   b. $A \rightarrow B$

      $C \rightarrow D$

$\sim B \vee \sim D$

$\sim A \vee \sim B$

A

$\therefore \sim C$

c. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$

$C \rightarrow (D \wedge E)$

A

B

$\therefore D$

Petunjuk Jawaban Latihan 1

1. a. Sebelum membuat tabel kebenaran, ubahlah bentuk argumen
   p
   $\therefore p \vee q$
   ke dalam bentuk pernyataan kondisional, yaitu
   $p \rightarrow (p \vee q)$

   b. Sebelum membuat tabel kebenaran, ubahlah bentuk argumen
   $p \rightarrow q$
   p
   $\therefore q$
   ke dalam bentuk pernyataan kondisional, yaitu
   $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$

   c. Sebelum membuat tabel kebenaran, ubahlah bentuk argumen
   $p \rightarrow q$
   $\sim q$
   $\therefore \sim p$

   ke dalam bentuk pernyataan kondisional, yaitu
   $((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$

d. Sebelum membuat tabel kebenaran, ubahlah bentuk argumen

$p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

$\therefore\ p \rightarrow r$

ke dalam bentuk pernyataan kondisional, yaitu

$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

2. a. Untuk membuktikan validitas argumen

$(A \vee B) \rightarrow (C \wedge D)$

~C

$\therefore$ ~B

Gunakan addisi, de Morgan, dan selanjutnya gunakan transposition.

b. Untuk membuktikan validitas argumen

$A \rightarrow B$

$C \rightarrow D$

~B $\vee$ ~D

~A $\vee$ ~B

A

$\therefore$ ~C

Gunakan modus ponen, dobel negasi, disjunctive syllogism, dan modus tolen.

c. Untuk membuktikan validitas argumen

$A \rightarrow (B \rightarrow C)$

$C \rightarrow (D \wedge E)$

A

B

$\therefore$ D

Gunakan modus tolen dan simplifikasi.

Rangkuman

1. Argumen merupakan rangkaian pernyataan-pernyataan yang mempunyai pernyataan ”penarikan kesimpulan”.
2. Di dalam argumen terdapat dua jenis pernyataan, yaitu premis, ditulis sebelum kata ”jadi”, dan konklusi atau kesimpulan, ditulis setelah kata ”jadi”.
3. Konklusi yang diambil berdasarkan premis-premisnya mungkin bernilai benar atau mungkin pula bernilai salah. Inferensi dari premis menuju konklusi yang hanya berdasarkan atas kemungkinan saja dinamakan inferensi induksi, argumennya dinamakan argumen induktif. Contoh argumen induktif:
   Semua pasangan suami-istri yang saya lihat hidup berbahagia.
   Saya melihat banyak pasangan suami-istri.
   Jadi, semua pasangan suami-istri hidup berbahagia.

4. Inferensi dari premis menuju konklusi yang tepat, tidak didasarkan atas kemungkinan dinamakan inferensi induksi, argumennya dinamakan argumen deduktif. Contoh.
   Jika terdengar suara adzan subuh adik bangun dari tempat tidurnya.
   Terdengar suara adzan subuh.
   Jadi, adik bangun dari tempat tidurnya.
5. Jika suatu argumen diubah menjadi pernyataan kondisional dan pernyataan itu merupakan tautologi maka argumen tersebut valid.
6. Selain dengan tabel kebenaran, ada cara lain yang lebih singkat yang dapat kita gunakan untuk membuktikan validitas argumen, yaitu dengan cara ”menurunkan” konklusi dari premis-premisnya dengan menggunakan beberapa argumen yang telah diketahui valid, misalnya modus ponen, modus tolen, simplifikasi, dll.

TES FORMATIF 1

Petunjuk: Pilihlah salah satu jawaban yang dianggap paling tepat !

1. Perhatikan argumen berikut.
   Jika malam turun hujan maka udara sangat dingin.
   Ternyata malam turun hujan.
   Jadi udara sangat dingin
   Argumen di atas jika ditulis dengan simbol adalah:
   a. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
   $C \rightarrow (D \wedge E)$
   $\therefore A$
   b. $A \rightarrow B$
   $\sim B \vee \sim D$
   $\therefore A$
   c. $A \rightarrow B$
   $\sim B$
   $\therefore A$
   d. $A \rightarrow B$
   A
   $\therefore B$

2. Perhatikan argumen berikut.
   Andi akan berlibur ke Dufan atau ke TMII
   Ternyata Andi tidak berlibur ke Dufan.
   Jadi Andi berlibur ke TMII
   Argumen di atas jika ditulis dengan simbol adalah:
   a. $B \vee C$
   $\sim B$
   $\therefore C$
   b. $B \wedge C$
   $\sim B$
   $\therefore C$
   c. $B \rightarrow C$
   B
   $\therefore C$
   d. $B \rightarrow C$
   $\sim C$
   $\therefore \sim B$

3. Perhatikan argumen berikut.
   Jika Budi ingin masuk UPI maka harus masuk SLTA dulu.
   Jika Budi ingin masuk SLTA maka harus masuk SLTP dulu.
   Jadi, jika Budi ingin masuk UPI maka harus masuk SLTP dulu.
   Argumen di atas jika ditulis dengan simbol adalah:
   a. $P \vee Q$
      $Q \vee R$
      $\therefore P \vee R$

   b. $P \rightarrow Q$
      $Q \rightarrow R$
      $\therefore P \rightarrow R$
   c. $P \wedge Q$
      $\sim Q$
      $\therefore \sim P$
   d. $P \rightarrow Q$
      P
      $\therefore Q$

4. Kesimpulan valid yang dapat ditarik dari rangkaian pernyataan berikut ini adalah.
   Jika Adi dan Budi ikut rekreasi maka Candra ikut rekreasi.
   Ternyata Candra tidak ikut rekreasi.
   Jadi, ...
   a. Adi tidak ikut rekreasi.
   b. Budi tidak ikut rekreasi.
   c. Adi dan Budi tidak ikut rekreasi.
   d. Adi atau Budi tidak ikut rekreasi.

5. Kesimpulan valid yang dapat ditarik dari rangkaian pernyataan berikut ini adalah.
   $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
   P
   $\sim R$
   a. $\sim Q$
   b. Q
   c. R
   d. $\sim P$

6. Kesimpulan valid yang dapat ditarik dari rangkaian pernyataan berikut ini adalah.
   $G \vee (L \wedge T)$
   $G \rightarrow \sim T$

T

a. ~G
b. G
c. ~L
d. L

7. Kesimpulan valid yang dapat ditarik dari rangkaian pernyataan berikut ini adalah.
   $A \rightarrow (B \vee (C \wedge D))$
   $\sim C \vee \sim D$
   $\sim B$
   a. ~A
   b. B
   c. ~C
   d. ~D

8. Kesimpulan valid yang dapat ditarik dari rangkaian pernyataan berikut ini adalah.
   $A \rightarrow B$
   $\sim A$
   a. ~B
   b. B
   c. ~A
   d. Tidak ada.

9. Kesimpulan valid yang dapat ditarik dari rangkaian pernyataan berikut ini adalah.
   $P \rightarrow Q$
   Q
   a. P
   b. ~P
   c. ~Q
   d. Tidak ada

10. Kesimpulan valid yang dapat ditarik dari rangkaian pernyataan berikut ini adalah.
   $R \rightarrow S$
   ~S
   a. R
   b. ~R
   c. S
   d. Tidak ada

Balikan dan Tindak Lanjut

Cocokkan jawaban anda dengan kunci jawaban tes formatif 1 yang ada pada bagian belakang modul ini. Hitunglah jawaban anda yang benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap modul ini.

Rumus:

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Banyak jawaban anda yang benar}}{10} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan:

90 % - 100 %	= Baik sekali
80 % - 89 %	= Baik
70 % - 79 %	= Cukup
< 69 %	= Kurang

Jika anda mencapai tingkat penguasaan 80 % ke atas, anda dapat meneruskan belajar ke Kegiatan Belajar 2. Bagus! Akan tetapi jika tingkat penguasaan anda masih di bawah 80 % maka anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 2 ini, terutama pada bagian yang belum anda kuasai.

Kuantor

Pengertian

Pada modul sebelumnya kita telah mengenal pernyataan, yaitu kalimat tertutup yang sudah jelas nilai kebenarannya. Kita juga telah mengenal negasi dari suatu pernyataan. Misalnya,

1. $5 + 5 = 25$
2. $5 > 1$

   Misalkan kita mempunyai beberapa pernyataan lain, misalnya,
3. Semua manusia adalah fana.
4. Semua bilangan asli adalah bilangan bulat.
5. Beberapa mahasiswa menganggap matematika adalah matakuliah yang sulit.

Kita sudah sangat familiar untuk membuat negasi dari pernyataan ke-1 dan pernyataan ke-2. Negasi dari pernyataan ke 1 adalah ” $5 + 5 \neq 25$” dan negasi dari pernyataan ke-2 adalah ” $5 \leq 3$”. Bagaimana negasi dari pernyataan ke-3, pernyataan ke-4, dan pernyataan ke-5 tanpa menggunakan kata tidak atau sejenisnya pada awal kalimatnya? Mungkin banyak diantara kita yang masih kesulitan untuk membuat negasi-negasi itu. Mengapa hal itu terjadi?

Jika kita amati, pernyataan-pernyataan tersebut (ke-3, ke-4, dan ke-5) memuat kata ”semua” atau kata ”beberapa”. Kata ”semua” sering kali diucapkan dengan kata ”setiap” atau ”untuk setiap” dan kata ”beberapa” serigkali diucapkan dengan kata ”terdapat” atau ”ada”. Dengan demikian, suatu pernyataan yang ditulis ”Semua manusia adalah fana” sama maknanya dengan pernyataan ”Setiap manusia adalah fana” atau ”Untuk setiap manusia, manusia itu fana”. Pernyataan yang ditulis ”Beberapa bilangan asli adalah bilangan prima” sama maknanya dengan ”Ada bilangan asli, bilangan asli itu adalah bilangan prima”, atau ”Terdapat bilangan asli, bilangan asli itu adalah bilangan prima”.

Kita mempunyai istilah tersendiri untuk ungkapan ”Semua x”, ”Setiap x”, ”Untuk setiap x”, ”Beberapa x”, ”Ada x”, dan ”Terdapat x” itu, yaitu **kuantor**. Terdapat dua jenis kuantor, yaitu kuantor umum (kuantor universal) dan kuantor khusus (kuantor eksistensial).

Meskipun mungkin kita telah familiar dengan pernyataan-pernyataan tungggal seperti yang pernah kita bahas. Sekali lagi, perhatikan pernyataan-pernyataan berikut:

(1) Ahmad adalah manusia.

(2) Budi adalah manusia.
(3) Candra adalah manusia.

Pernyataan-pernyataan di atas merupakan pernyataan tungggal. Pada pernyataan pertama, ”Ahmad” merupakan subyek sedangkan ”adalah manusia” merupakan predikat. Setiap pernyataan tunggal, bagian-bagiannya (subyek dan predikat) mempunyai tafsiran yang tergantung pada hubungan antara satu bagian dan bagian lainnya. Pernyataan tunggal dinyatakan dengan melatakkan simbol predikat di sebelah kiri subyeknya. Subyek ditulis dengan huruf kecil dan predikat ditulis dengan huruf besar. Pernyataan ” Ahmad adalah manusia” dapat dinyatakan dengan Ma, pernyataan ”Budi adalah manusia” dinyatakan dengan Mb, dan ”Candra adalah manusia” dinyatakan dengan Mc.

Pernyataan-pernyataan tunggal di atas dilambangkan dengan dua huruf. Huruf pertama ”M” menyatakan seorang manusia, dan huruf ke dua ”a”, ”b”, ”c” menyatakan siapa yang menjadi manusia tersebut, berfungsi sebagai subyek yang dijelaskan oleh predikat M. Lambang umum untuk ketiga pernyataan di atas adalah Mx, di mana x adalah variabel individual yang dapat diganti dengan konstanta indiviual. Ma, Mb, dan Mc pada contoh di atas adalah bentuk khusus sebagai hasil substitusi dari Mx untuk $x = a$, $x = b$, dan $x = c$. Ungkapan ”Mx” dinamakan **fungsi proposisi**. Mx akan menjadi pernyataan jika variabel individualnya (x) diganti (disubstitusi) dengan konstanta individual.

Suatu pernyataan tunggal adalah ”***substitution instance***” dari fungsi proposisi yang diperoleh dari substitusi konstanta individual terhadap variabel individualnya dalam fungsi proposisi tersebut. Misalnya, dari Hx yang menyatakan sesuatu adalah manusia, kita dapat melakukan instantiasi menjadi

(1) Ma, menyatakan Ahmad adalah manusia.
(2) Mb, menyatakan Budi adalah manusia.
(3) Mc, menyatakan Candra adalah manusia.

Proses memperoleh suatu pernyataan dari fungsi proposisi dengan cara mensubstitusikan sebuah konstanta individual pada variabel indiviualnya dinamakan **instantiasi.**

Kuantor Umum
Perhatikan pernyataan berikut,
”Semua manusia adalah fana”.
Pernyataan itu kita ganti dengan

”Untuk setiap obyek, obyek itu fana”.

Kata ”obyek” kita ganti dengan lambang ”x”, sehingga kita peroleh

”Untuk setiap x, x adalah fana”

Lebih singkat lagi, kita ganti kata ”x adalah fana” dengan simbol ”Mx”, sehingga kita peroleh

” Untuk setiap x, Mx”.

Kata ”Untuk setiap (semua) x” disebut kuantor umum atau kuantor universal, dan diberi lambang ”$(\forall x)$”. Dengan lambang ini kita dapat mengganti pernyataan ” Untuk setiap x, Mx” dengan cara yang lebih singkat, yaitu

” $(\forall x)$ Mx”

Simbol terakhir itu dibaca

”Untuk setiap x, x mempunyai sifat M”, atau

”Untuk setiap x, berlaku Mx”.

Akibat adanya kuantor $\forall x$, maka Mx menjadi kalimat tertutup.

Perhatikan contoh berikut:

1. Misal M(x) adalah kalimat terbuka : $x + 3 > 5$
   Apabila pada kalimat ini dibubuhi kuantor universal, maka $(\forall x)$ (Mx) berarti $(\forall x)$ $(x + 3 > 5)$. Ini merupakan kalimat tertutup, dan diucapkan : “Untuk setiap x berlaku $x + 3 > 5$”. Nilai kebenaran dari pernyataan ini adalah salah (S),
2. Jika x adalah bilangan real, maka $(\forall x)$ $(x^2 + 3 > 0)$. Nilai kebenaran dari pernyataan ini adalah benar (B).
3. Misalkan N adalah himpunan bilangan asli. $(\forall x, \forall y \in N)$ $((x - y) \in N)$. Nilai kebenaran dari pernyataan ini adalah salah (S).

Kuantor Khusus

Seperti halnya pada kuantor umum, kita dapat membuat pernyataan dengan menggunakan kuantor khusus. Perhatikan pernyataan berikut,

”Beberapa mahasiswa adalah calon pemimpin bangsa”.

Pernyataan itu kita ganti dengan

”Beberapa obyek, obyek itu calon pemimpin bangsa”.

Kata ”obyek” kita ganti dengan lambang ”x”, sehingga kita peroleh

”Beberapa x, x adalah calon pemimpin bangsa”

Lebih singkat lagi, kita ganti kata ”x adalah calon pemimpin bangsa” dengan simbol ”Mx”, sehingga kita peroleh

” Beberapa x, Mx”.

Kata ”Beberapa (terdapat atau ada) x” disebut kuantor khusus atau kuantor eksistensial, dan diberi lambang ”($\exists$ x)”. Dengan lambang ini kita dapat mengganti pernyataan ” Beberapa x, Mx” dengan cara yang lebih singkat, yaitu

” ($\exists$ x) Mx”

Simbol terakhir itu dibaca

”Beberapa x, x mempunyai sifat M”, atau

”Beberapa x, berlaku Mx”.

Kata ”beberapa” dapat diganti dengan ”terdapat” atau ”ada”. Kata-kata itu mengandung arti “paling sedikit satu”

Akibat adanya kuantor $\forall$ x, maka Mx menjadi kalimat tertutup.

Perhatikan contoh berikut:

1. Misal M(x) adalah kalimat terbuka : $x + 3 > 0$
   Apabila pada kalimat ini dibubuhi kuantor eksistensial, maka ($\exists x \in$ R) (Mx) berarti ($\exists x \in$ R) ($x + 3 > 0$). Ini merupakan kalimat tertutup, dan diucapkan “Beberapa x anggota bilangan real berlaku $x + 3 > 0$”. Nilai kebenaran dari pernyataan ini adalah benar (B),
2. Jika R adalah himpunan bilangan real, maka ($\exists$ x) ($x^2 + 4 = 0$). Nilai kebenaran dari pernyataan ini adalah salah (S).
3. Misalkan N adalah himpunan bilangan asli. ($\exists$ x, $\exists y \in$ N) ($(x - y) \in$ N). Nilai kebenaran dari pernyataan ini adalah benar (B).

Negasi Pernyataan Berkuantor

Perhatikan pernyataan berikut :

(1) Semua bilangan prima adalah bukan bilangan asli.

(2) Tidak ada bilangan prima adalah bilangan asli.

(3) Beberapa bilangan prima bukan bilangan asli.

Penyataan (1) dan (2) merupakan pernyataan yang sama, kedua pernyataan itu merupakan negasi dari pernyataan ” Beberapa bilangan prima adalah bilangan asli”. Sedangkan pernyataan (3) merupakan negasi dari ”Semua bilangan prima adalah bilangan asli”.

Perhatikan kembali pernyataan (1), yaitu

Semua bilangan prima adalah bukan bilangan asli.

Pernyataan itu kita ganti dengan

”Semua obyek, obyek itu adalah bukan bilangan asli”.

Kata ”obyek” kita ganti dengan lambang ”x”, sehingga kita peroleh

”Untuk setiap x, x adalah bukan bilangan asli”

Lebih singkat lagi, kita ganti kata ”x adalah bukan bilangan asli” dengan simbol ” ~ Mx”, sehingga kita peroleh

” Semua x, ~ Mx”.

Kita telah mengetahui bahwa kata ”Semua (Untuk setiap) x” diberi lambang ”($\forall$ x)”. Dengan lambang ini kita dapat mengganti pernyataan ” Semua x, ~ Mx” dengan cara yang lebih singkat, yaitu

” ($\forall$ x) ~ Mx”

Simbol terakhir itu dibaca

”Semua x, x tidak mempunyai sifat M”, atau

”Untuk setiap x, tidakberlaku Mx”.

Pernyataan-pernyataan itu sama maknanya dengan pernyataan

”Tidak ada bilangan prima adalah bilangan asli” dan diberi simbol

” ~ ($\exists$ x) Mx”

Dengan demikian, negasi dari ” ($\exists$ x) Mx ”

adalah ” ($\forall$ x) ~ Mx” atau ” ~ ($\exists$ x) Mx”

Contoh :

1. Pernyataan “Semua orang akan mati” adalah benar (B). Negasinya adalah “tidak benar bahwa semua orang akan mati” adalah salah (S), atau “beberapa orang tidak akan mati” adalah salah (S).
2. Pernyataan ” ($\exists$ x $\in$ R)($x^2 + 1 = 0$)” adalah salah (S). Negasinya adalah ”($\forall$ x $\in$ R) ($x^2 + 1 \neq 0$)” benar (B), atau ” ~ ($\exists$ x $\in$ R) ($x^2 + 1 = 0$)” benar (B).

Validitas Argumen Berkuantor

Untuk dapat memeriksa validitas argumen berkuantor, akan kita tinjau lebih dahulu beberapa pernyataan yang memuat relasi.

Perhatikan pernyataan berikut:

”Ahmad mencintai Beti” atau

”Beti mencintai Ahmad”

Misalkan ”a” sebagai lambang untuk Ahmad, ”b” sebagai lambang untuk Beti, dan ”M” sebagai lambang untuk mencintai. Selanjutnya kita dapat membuat notasi untuk pernyataan pertama yaitu Mab dan yang pernyataan kedua yaitu Mba. Kita harus hati-hati, tidak boleh tertukar, menuliskan Mab dan Mba karena artinya berbeda.

Kita perhatikan pernyataan-pernyataan berikut:

(4) Ahmad mencintai semua gadis, dan

(5) Semua gadis mencintai Ahmad.

Misalkan

Qx: x adalah seorang gadis

Pernyataan-pernyataan di atas dapat dinyatakan sebagai

(1) $(\forall x)(Qx \rightarrow Max)$

(2) $(\forall x)(Qx \rightarrow Mxa)$

Untuk menyusun bukti langsung validitas argumen yang memuat kuantor, kita memerlukan beberaa aturan baru, yaitu:

1. Universal Instantiation / UI

   Kuantor umum suatu fungsi proposisi adalah benar jika dan hanya jika semua substitution instance fungsi proposisinya benar. Dengan demikian, suatu substitution instance sebuah fungsi proposisi dapat ditarik secara valid dari kuantor umumnya. Aturan ini dinamakan Universal Instantiation dan dinyatakan dengan simbol sebagai berikut:

   $(\forall x)Mx$

   ______________ di mana Ma adalah lambang individual

   $\therefore Ma$

Contoh.

Buktikan validitas argumen berikut:

Semua mahaiswa UPI adalah orang pintar.

Budi adalah mahasiswa UPI.

Jadi, Budi adalah orang pintar.

Jawab.

Untuk membuktikan argumen di atas, langkah pertama kita adalah memisalkan pernyataan-pernyataan itu dalam bentuk simbol-simbol.

Misalkan Kx: x adalah seorang mahasiswa UPI.

Hx: x adalah orang pintar

b adalah Budi.

Dengan demikian,

1. $(\forall x)(Kx \rightarrow Hx)$
2. Kb.

$\therefore$ Hb

Selanjutnya kita akan menunjukkan bukti vaiditas argumen di atas, yaitu:

1.	$(\forall x)(Kx \rightarrow Hx)$	(Pr)
2.	Kb.	(Pr)
3.	$Kb \rightarrow Hb$	(1, UI)
4.	Hb	(3, 2, MP)

2. Universal Generalization / UG

Dengan menggunakan Universal Generalization kita akan menyimpulkan secara umum dari sesuatu yang merupakan karakteristik / ciri khas / sifat individu, yang juga terdapat pada individu lain yang sejenis. Kesimpulan itu menyangkut sifat atau ciri khas tersebut berlaku pula untuk sembarang individu. Dengan demikian, jika "a" adalah lambang individual, maka "Ma" yang benar mengakibatkan "Mx" benar pula. Aturan ini dinamakan Universal Generalization dan dinyatakan dengan simbol sebagai berikut:

Ma

_______________ di mana Ma adalah lambang individual

$\therefore (\forall x)Mx$

Contoh.

Buktikan validitas argumen berikut:

Semua bilangan asli adalah bilangan bulat.

Tidak ada bilangan bulat yang merupakan bilangan pecahan.

Jadi, tidak ada bilangan asli yang merupakan bilangan pecahan.

Jawab.

Untuk membuktikan argumen di atas, langkah pertama kita adalah memisalkan pernyataan-pernyataan itu dalam bentuk simbol-simbol.

Misalkan Kx: x adalah sebuah bilangan asli.

Hx: x adalah bilangan bulat.

Lx: x adalah bilangan pecahan.

Dengan demikian,

1. $(\forall x)(Kx \rightarrow Hx)$
2. $(\forall x)(Hx \rightarrow {\sim}Lx)$

$\therefore (\forall x)(Kx \rightarrow {\sim}Lx)$

Selanjutnya kita akan menunjukkan bukti vaiditas argumen di atas, yaitu:

1. $(\forall x)(Kx \rightarrow Hx)$ (Pr)
2. $(\forall x)(Hx \rightarrow {\sim}Lx)$ (Pr)
3. $Ka \rightarrow Ha$ (1, UI)
4. $Ha \rightarrow {\sim}La$ (2, UI)
5. $Ka \rightarrow {\sim}La$ (4, 3, HS)
6. $(\forall x)(Kx \rightarrow {\sim}Lx)$ (5, UG)

3. Existential Generalization / EG

Kuantor eksistensial suatu fungsi proposisi dikatakan benar jika dan hanya jika fungsi proposisi tersebut mempunyai paling sedikit satu substitusi instan yang benar. Kita dapat melakukan penarikan kesimpulan dari substitution instance yang benar dan menghasilkan kuantor eksistensial suatu fungsi proposisi yang benar pula. Aturan ini dinamakan Existential Generalization dan dinyatakan dengan simbol sebagai berikut:

$$\frac{Ma}{\therefore (\exists x)Mx}$$

di mana Ma adalah lambang individual

Contoh.

Buktikan validitas argumen berikut:

Setiap bilangan bulat adalah bilangan rasional.

Jadi, jika 5 adalah bilangan bulat, maka ada beberapa bilangan bulat bulat adalah bilangan rasional.

Jawab.

Untuk membuktikan argumen di atas, langkah pertama kita adalah memisalkan pernyataan-pernyataan itu dalam bentuk simbol-simbol.

Misalkan Ix: x adalah sebuah bilangan bulat.

Qx: x adalah bilangan rasional.

"5" dilambangkan dengan "f".

Dengan demikian,

$(\forall x)(Ix \rightarrow Qx)$

If

$\therefore (\exists x)(Ix \wedge Qx)$

Selanjutnya kita akan menunjukkan bukti vaiditas argumen di atas, yaitu:

1. $(\forall x)(Ix \rightarrow Qx)$ (Pr)
2. If (Pr)
3. $If \rightarrow Qf$ (1, UI)
4. Qf (3, 2, MP)
5. $If \wedge Qf$ (2, 4, Conj)
6. $(\exists x)(Ix \wedge Qx)$ (5, EG)

4. Existential Instantiation / EI

Pada kuantor eksistensial terdapat paling sedikit satu substitusi tertentu yang dapat menggantikan variabel "x" pada fungsi proposisinya, yang akan menghasilkan sebuah substitution instance. Kita dapat mengambil konstanta individual selain "a", misalnya "y". Konstanta individual "y" tidak pernah muncul sebelumnya dalam pembuktian yang sedang dilakukan. Dengan konstanta individual "y" kita dapat melakukan penarikan kesimpulan dari kuantor eksistensial suatu fungsi proposisi yang memuat "y". Aturan ini dinamakan Existential Instantiation dan dinyatakan dengan simbol sebagai berikut:

$(\exists x)Mx$

____

$\therefore My$

Contoh.

Buktikan validitas argumen berikut:

Semua peserta Pildacil adalah anak berprestasi.

Beberapa anak adalah peserta Pildacil.

Jadi Beberapa anak adalah anak berprestasi.

Jawab.

Untuk membuktikan argumen di atas, langkah pertama kita adalah memisalkan pernyataan-pernyataan itu dalam bentuk simbol-simbol.

Misalkan Px: x adalah seorang peserta Pildacil.

Qx: x adalah anak berprestasi.

Rx: x adalah anak.

Dengan demikian,

$(\forall x)(Px \rightarrow Qx)$

$(\exists x)(Rx \wedge Px)$

$\therefore (\exists x)(Rx \wedge Qx)$

Selanjutnya kita akan menunjukkan bukti vaiditas argumen di atas, yaitu:

1.	$(\forall x)(Px \rightarrow Qx)$	(Pr)
2.	$(\exists x)(Rx \wedge Px)$	(Pr)
3.	$Ry \wedge Py$	(2, EI)
4.	$Py \rightarrow Qy$	(1, EI)
5.	$Py \wedge Ry$	(3, Com)
6.	Py	(5, Simp)
7.	Qy	(4, 6, MP)
8.	Ry	(3, Simp)
9.	$Ry \wedge Qy$	(8, 7, Conj)
10.	$(\exists x)(Rx \wedge Qx)$	(9, EG)

Latihan 2

1. Tuliskanlah dengan kata-kata tanpa simbol dari tiap pernyataan berkuantor dengan simbol sebagai berikut:
   a. $(\exists x \in R)(x^2 - 5x + 6 = 0)$
   b. $(\forall x \in R)[(x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)]$
   c. $(\exists x, \forall y)(x + y = 0)$

2. Tuliskanlah dengan dengan simbol logika dari tiap pernyataan berkuantor berikut:
   a. Semua ikan paus adalah hewan menyusui.
   b. Beberapa burung bersayap beraktivitas pada malam hari.
   c. Beberapa ikan paus tidak termasuk hewan menyusui.

3. Tentukan nilai kebenaran dari tiap pernyataan berkuantor berikut, jika x dan y bilangan real.
   a. $(\exists x)(x < 2)$
   b. $(\forall x)(x^2 < 0)$
   c. $(\forall x)(\exists y)(x + y = x)$

4. Tentukanlah negasi dari pernyataan berikut tanpa mencantumkan lambang negasi pada awal kalimat / pernyataan negasi.
   a. $(\forall x)[(x^2 - 4) = (x + 2)(x - 2)]$
   b. $(\exists x)(x^2 + 2x - 8 = 0)$
   c. $(\forall x)(\exists y)(x + y = x)$

5. Buktikan validitas berkuantor argumen berikut..
   a. Semua orang sabar disayang Tuhan.
      Abdullah adalah orang sabar.
      Jadi, Abdullah disayang Tuhan.

   b. Semua pemain bola adalah atlet.

      Tidak ada atlet pemakai narkoba.
      Jadi, Tidak ada pemain bola pemakai narkoba.

Petunjuk Jawaban Latihan 2

1. a. Ada x anggota bilangan real sehingga berlaku $x^2 - 5x + 6 = 0$.
   b. Caranya serupa dengan (a) tetapi $\forall$ menyatakan untuk setiap.
   c. Caranya erupa dengan (a) tetapi didahului dengan untuk setiap x dan beberapa y.

2. a. $(\forall x)$ Mx
   b. Caranya serupa dengan (a) tetapi gunakan lambang $\exists$.
   c. Caranya serupa dengan (b).
3. a. Benar (mengapa?)
   b. Salah (ambil satu contoh penyangkal).
   c. Benar (pilih y = 0)
4. a. Ingat polanya $(\exists x)$ ~Mx
   b. Ingat Polanya $(\forall x)$ ~Mx
   c. Ingat Polanya $(\exists x)$ sehingga $(\forall y)$ ~Mx.

5. a. Gunakan UI
   b. Gunakan UG

Rangkuman

1. Kita mempunyai istilah tersendiri untuk ungkapan ”Semua x”, ”Setiap x”, ”Untuk setiap x”, ”Beberapa x”, ”Ada x”, dan ”Terdapat x” itu, yaitu kuantor. Terdapat dua jenis kuantor, yaitu kuantor umum (kuantor universal) dan kuantor khusus (kuantor eksistensial). Kuantor universal dinotasikan “$\forall$” yang berarti “semua” atau “setiap”, dan kuantor eksistensial yang dinotasikan “$\exists$” mempunyai arti “beberapa” atau “terdapat”, atau “ada”.
2. Pernyataan-pernyataan tunggal dapat dilambangkan dengan dua huruf, huruf kapital yang menyatakan predikat dan huruf biasa yang menyatakan subyek. Misalnya, Ma dapat menyatakan Ahmad adalah manusia.
3. Ungkapan ”Mx” dinamakan fungsi proposisi. Mx akan menjadi pernyataan jika variabel individualnya (x) diganti (disubstitusi) dengan konstanta individual.
4. Suatu pernyataan tunggal adalah ”substitution instance” dari fungsi proposisi yang diperoleh dari substitusi konstanta individual terhadap variabel individualnya dalam fungsi proposisi tersebut. Misalnya, dari “Mx” yang menyatakan sesuatu adalah manusia, kita dapat melakukan instantiasi menjadi “Ma, menyatakan Ahmad adalah manusia”. Proses memperoleh suatu pernyataan dari fungsi proposisi dengan cara mensubstitusikan sebuah konstanta individual pada variabel indiviualnya dinamakan instantiasi.
5. Untuk memeriksa validitas suatu argumen berkuantor kita dapat memanfaatkan beberapa aturan, diantaranya adalah:
   a. Universal Instantiation / UI
      Simbol aturan ini adalah

$$\frac{(\forall x)Mx}{\therefore Ma}$$

di mana Ma adalah lambang individual

b. Universal Generalization / UG

Simbol aturan ini adalah

$$\frac{Ma}{\therefore (\forall x)Mx}$$ di mana Ma adalah lambang individual

c. Existential Generalization / EG

Simbol aturan ini adalah

$$\frac{Ma}{\therefore (\exists x)Mx}$$ di mana Ma adalah lambang individual

d. Existential Instantiation / EI

Simbol aturan ini adalah

$$\frac{(\exists x)Mx}{\therefore My}$$

Tes Formatif 2

Petunjuk: Pilihlah salah satu jawaban yang dianggap paling tepat !

1.. Salah satu contoh pernyataan kuantor umum adalah :
   a. Beberapa bilangan prima bukan bilangan asli.
   b. Ada kucing yang tidak berbulu hitam.
   c. Sekurang-kurangnya ada satu orang genius.
   d. Semua wanita berkacamata.

2.. Di bawah ini terdapat beberapa contoh pernyataan kuantor khusus, kecuali :
   a. Setiap manusia akan mati.
   b. Paling sedikit satu orang tidak menyukai bunga.
   c. Beberapa binatang berbulu indah.
   d. Ada bilangan prima yang genap.

3. Yang merupakan fungsi proposisi sebagai variabel individual pada bentuk $(\exists x)$ Cx adalah
   a. $\exists$
   b. $\exists x$
   c. Cx
   d. x

4. Yang merupakan kuantor eksistensial dari pernyataan $(\forall x)(\exists y)(Cx \wedge Day)$ adalah
   a. $\forall x$
   b. $\exists y$
   c. Cx
   d. Day

5. Jika Mx: x adalah seorang siswa, Hx: x adalah rajin belajar, maka lambang yang paling tepat dari pernyataan ”Semua siswa rajin belajar” adalah
   a. $(\forall x)(Mx)(Hx)$
   b. $(\forall x)(Mx \rightarrow Hx)$
   c. $(\forall x)(Mx \wedge Hx)$
   d. $(\forall x)(Mx \vee Hx)$

6. Jika Ax: x adalah seorang artis sinetron, Bx: x adalah cantik mempesona, dan Cx: x adalah pintar, maka lambang yang paling tepat dari pernyataan ”Beberapa artis

sinetron mempesona mempesona dan pintar" adalah

a. $(\exists x)$ (Bx) (Cx)
b. $(\exists x)(Ax \rightarrow Bx)$
c. $(\exists x)(Bx \wedge Cx)$
d. $(\exists x)(Bx \vee Cx)$

7. Negasi dari pernyataan :"Ada x yang memenuhi $x - 3 = 0$" adalah :
   a. Beberapa x tidak memenuhi $x - 3 = 0$
   b. Ada x yang memenuhi $x - 3 \neq 0$
   c. Semua x yang tidak memenuhi $x - 3 = 0$
   d. Setiap x yang memenuhi $x - 3 = 0$

8. Negasi dari pernyataan "$(\forall x \in R)(2^x > 2x)$" adalah :
   a. $(\exists x \in R)(2^x \leq 2x)$
   b. $(\exists x \in R)(2^x < 2x)$
   c. $(\forall x \in R)(2^x < 2x)$
   d. $(\forall x \in R)(2^x \leq 2x)$

9. Negasi dari pernyataan "$(\forall x \in R)$ ($3x > x$ atau $x + 3 > x$)" adalah :
   a. $(\exists x \in R)$ ($3x < x$ atau $x + 3 < x$)
   b. $(\exists x \in R)$ ($3x \leq x$ dan $x + 3 \leq x$)
   c. $(\forall x \in R)$ ($3x < x$ dan $x + 3 < x$)
   d. $(\forall x \in R)$ ($3x \leq x$ atau $x + 3 \leq x$)

10. Perhatikan pernyataan-pernyataan berikut:
    (1) $(\exists x \in R)(x < 2)$
    (2) $(\forall x \in R)(x^2 > 0)$
    (3) $(\forall x \in R, \exists y \in R)(x + y = x)$
    Dari ketiga pernyataan tersebut yang mempunyai nilai kebenaran "benar (B)" adalah
    b. (1)
    c. (1) dan (2)
    d. (1) dan (3)
    e. (1), (2), dan (3)

KUNCI JAWABAN LATIHAN FORMATIF

Tes Formatif 1

1. d
2. a
3. b
4. d
5. a
6. d
7. a
8. d
9. d
10. b

Tes Formatif 2

1. d
2. a
3. c
4. b
5. b
6. c
7. c
8. a
9. b
10. c

MODUL 5

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN

PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN

PENDAHULUAN

Modul ke lima ini berisi tentang materi persamaan dan pertidaksamaan. Persamaan dan pertidaksamaan yang dibahas meliputi persamaan linear, pertidaksamaan linear, persamaan kuadrat, dan pertidaksamaan kuadrat.

Persamaan dan pertidaksamaan ini adalah materi yang sering terkait dalam kehidupan sehari-hari, ketika kita akan menyelesaikan suatu soal yang berbentuk cerita atau pemecahan masalah sering kali menggunakan penyelesaian dengan menggunakan persamaan atau pertidaksamaan. Konsep persamaan dan pertidaksamaan berkembang dari konsep kesamaan dan ketidaksamaan pada sistem bilangan real, sehingga untuk menyelsaikan suatu persamaan atau pertidaksamaan banyak menggunakan sifat-sifat kesamaan dan ketidaksamaan pada bilangan real.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat memahami hal-hal yang berhubungan dengan persamaan dan pertidaksamaan linear satu variabel dan dua variabel serta dapat memahami hal-hal yang berhubungan dengan persamaan kuadrat dan pertidaksamaan kuadrat.

Secara lebih rinci, setelah mempelajari modul ini anda diharapkan mampu:

1. Menentukan apakah suatu kalimat matematika termasuk persamaan atau kemasaan.
2. Menentukan apakah suatu kalimat matematika termasuk pertidaksamaan atau ketidaksamaan.
3. Menyelesaikan masalah persamaan linear satu variabel.
4. Menyelesaikan masalah pertidaksamaan linear satu variabel.
5. Menyelesaikan masalah sistem persamaan linear dua variabel.
6. Menyelesaikan masalah sistem pertidaksamaan satu variabel.
7. Menyelesaikan masalah persamaan kuadrat dengan faktorisasi.
8. Menyelesaikan masalah persamaan kuadrat dengan menjadikan kuadrat sempurna.
9. Menyelesaikan masalah persamaan kuadrat dengan rumus ”abc”
10. Menyelesaiakan masalah pertidaksamaan kuadrat..

11. Menyelsaikan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan persamaan.
12. Menyelesaikan masalah sehari-hari yang berkaitan dengan pertidaksamaan.

Agar anda berhasil dengan baik dalam mempelajri modul ini, ikutilah petunjuk-petunjuk berikut ini.

1. Bacalah dengan baik pendahuluan modul ini sehingga Anda memahami tujuan mempelajari modul ini dan bagaimana mempelajarinya.
2. Bacalah bagian demi bagian materi yang ada dalam modul ini, kalau perlu tandai kata-kata / kaliamat yang dianggap penting. Ucapkan dalam bahasa sendiri kata/kaliamat yang ditandai tersebut.
3. Pahami pengertian demi pengertian dari isi modul ini dengan mempelajari contoh-contohnya, dengan pemahaman sendiri,dan berdiskusi dengan kawan mahasiswa atau orang lain.
4. Kerjakan soal-soal latihan dalam modul ini tanpa melihat petunjuk penyelesaiannya lebih dulu. Apabila mendapat jalan buntu, barulah Anda melihat petunjuk penyelesaiannya. Jawaban Anda tidak perlu sama dengan petunjuk yang diberikan, karena kadang-kadang banyak cara yang dapat kita lakukan dalam menyelesiakan suatu permasalahan.
5. Kerjakan soal-soal tes formatif untuk mengukur sendiri tingkat penguasaan anda akan isi modul ini.

Sebagai acuan utama penulisan modul ini adalah: (1) buku karangan Billstein, Liberskind, dan Lot (1993), A Problem Solving Approach to Mathematics for School Teachers, (2) buku karangan Spiegel, Murray R. (terjemahan: Kasir Iskandar). (1989). Seri Buku SchaumTeori dan Soal-Soal: Matematika Dasar. (3) buku karangan Sukirman, dkk. (2005). Matematika, dan (4) buku karangan Wheeler, Ruric E. (1992). Modern Mathematics. Sedangkan sebagai rujukan tambahan penulisan modul ini adalah buku-buku matematika yang banyak beredar di pasaran.

Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

Pengertian Persamaan, dan Pertidaksamaan

Pada modul sebelumnya kia telah membahas kalimat, khususnya tentang pernyataan. Pernyataan merupakan kalimat tertutup yang sudah jelas nilai kebenarannya. Sebuah kalimat dikatakan pernyataan jika kalimat itu mempunyai nilai kebenaran benar saja atau salah salah saja, tidak mungkin benar atau salah sekaligus.

Contoh pernyataan:

"Jakarta adalah ibukota negara Republik Indonesia" merupakan pernyataan dengan nilai kebenaran "benar".

"Semua bilangan prima adalah bilangan ganjil" merupakan pernyataan dengan nilai kebenaran "salah".

Di pihak lain, kalimat bukan pernyataan merupakan kalimat terbuka yang belum mempunyai nilai kebenaran pasti, mungkin benar atau mungkin salah.

Contoh bukan pernyataan:

"y adalah bilangan prima" merupakan kalimat bukan pernyataan, nilai kebenaran kalimat itu tergantung pada bilangan yang akan disubstitusikan terhadap y.

"$5 + x = 7$" juga merupakan kalimat bukan pernyataan, nilai kebenaran kalimat itu tergantung pada bilangan yang akan disubstitusikan terhadap x.

Kesamaan merupakan kalimat pernyataan yang dihubungkan dengan "tanda sama dengan" yaitu "=", sedangkan ketidaksamaan dihubungkan dengan "$<$, $\leq$., $>$, $\geq$ atau $\neq$".

Contoh kesamaan:

$2 + 3 = 5$

$2 \times 3 = 6$

Contoh ketidaksamaan:

$2 + 3 < 2 + 4$

$2 \times 3 \leq 10$

Jika kesamaan merupakan kalimat tertutup (pernyataan), maka persamaan merupakan kalimat terbuka (bukan pernyataan). Persamaan merupakan kalimat terbuka yang memuat tanda "=". Terdapat bermacam-macam persamaan, diantaranya persamaan linear dan persamaan kuadrat.

Contoh persamaan:

$n + 2 = 5$

$3x + 6 = 9$

Seperti halnya dengan persamaan, pertidaksamaan juga merupakan kalimat terbuka. Pada pertidaksamaan, tanda hubung yang digunakan bukan "=" tetapi "$<$, $\leq$., $>$, $\geq$, atau $\neq$".

Persamaan Linier

Bentuk-bentuk persamaan linear sebenarnya telah dikenalkan sejak anak-anak duduk di bangku SD kelas rendah. Sebagai contoh, 2 + 3 = 9, berapa ?

Jika kita ganti gambar persegi itu dengan x, maka bentuk persamaan itu menjadi

$2x + 3 = 9$

Sekarang, perhatikan beberapa persamaan berikut:

(1) $2x + 3 = 9$

(2) $4 - 5x = 14$

(3) $x^2 + 5x = -6$

Persamaan (1) dan (2) masih satu jenis, sedangkan persamaan (3) jenis yang lain. Pada persamaan (1) dan (2) pangkat tertinggi pada variabel x adalah 1, sedangkan pada persamaan (3) pangkat tertinggi pada variabel x adalah 2. Persamaan (1) dan (2) dinamakan persamaan linear, sedangkan persamaan (3) persamaan bukan linear. Persamaan linear mempunyai bentuk umum

$Ax + B = 0$, di mana $A \neq 0$

Pada persamaan (1) di atas bentuknya dapat disajikan seperti bentuk umum, yaitu dengan cara sebagai berikut:

$2x + 3 = 9$ ekuivalen dengan

$2x + 3 - 9 = 9 - 9$ ekuivalen dengan

$2x - 6 = 0$

Bentuk terakhir ini sama dengan bentuk umum, di mana A = 2 dan B = -6.

Pada persamaan (2) di atas bentuknya dapat disajikan seperti bentuk umum juga, yaitu dengan cara sebagai berikut:

$4 - 5x = 14$ ekuivalen dengan

$4 - 5x - 14 = 14 - 14$ ekuivalen dengan

$4 - 14 - 5x = 0$ ekuivalen dengan

$-10 -5x = 0$ ekuivalen dengan

$-5x - 10 = 0$

Bentuk terakhir ini sama dengan bentuk umum, di mana A = -5 dan B = -10.

Menyelesaikan suatu persamaan berarti mencari suatu bilangan yang apabila disubstitusikan ke variabel pada persamaan itu, persamaan itu berubah menjadi kalimat tertutup yang mempunyai nilai kebenaran "benar". Banyak cara mencari bilangan yang cocok itu, mulai dari mencoba-coba sampai dengan mengikuti algoritma dan memanfaatkan sifat-sifat operasi aljabar. Salah satu cara menentukan penyelesaian suatu persamaan akan ditunjukkan melalui contoh soal berikut.

Tentukan himpunan penyelesaian (Hp) dari masalah-masalah berikut:

1. $2x + 9 = 37$
2. $5 - 3x = 38$
3. $3(x - 2) + 2(x + 1) = 4x + 1$
4. Jumlah dua bilangan berutan adalah 25 tentukanlah bilangan tersebut!

Jawab.

1. $2x + 9 = 37$

   $2x + 9 - 9 = 37 - 9$

   $2x = 28$

   $$\frac{2x}{2} = \frac{28}{2}$$

   $x = 14$

   $Hp = \{14\}$

Jika hasil ini (x = 14) kita substitusikan ke persamaan 2x + 9 = 37 maka diperoleh kesamaan 2 x 14 + 9 = 37.

2. 5 – 3x = 38

   5 – 3x – 5 = 38 – 5

   -3x = 33

   $$\frac{-3x}{-3} = \frac{3}{-3}$$

   x = -11

   Hp = {-11}

Jika hasil ini (x = -11) kita substitusikan ke persamaan 5 – 3x = 38 maka diperoleh kesamaan 5 – (3 x (-11)) = 38.

3. 3(x – 2) + 2(x + 1) = 4x + 1

   3(x – 2) + 2(x + 1) = 4x + 1

   3x – 6 + 2x + 2 = 4x + 1

   5x – 4 = 4x + 1

   x = 5

   Hp = {5}

Jika hasil ini (x = 5) kita substitusikan ke persamaan

3(x – 2) + 2(x + 1) = 4x + 1 maka diperoleh kesamaan

3(5 – 2) + 2(5 + 1) = 4(5) + 1

4. Misalkan bilangan pertama adalah n. Jadi bilangan ke dua adalah (n + 1)

   n + (n + 1) = 25

   (n + n) + 1 = 25

   2n + 1 = 25

   2n = 24

   n = 12

Dengan demikian bilangan-bilangan itu adalah 12 dan 13.

Hp = {12, 13}

Pertidaksamaan Linear

Dalam kehidupan sehari kita sering mendengar kalimat yang menunjuk kepada ketidaksamaan atau pertidaksamaan, seperti: (1) Amin lebih pendek daripada Budi; (2) Aji mempunyai uang lebih banyak daripada Noni; (3) Sisa uang tabungan Saya paling sedikit Rp 2.000.000,00; (4) Badru dikasih uang jajan oleh Ibunya paling banyak Rp. 5.000,00 setiap harinya.

Contoh-contoh tersebut adalah kalimat yang bila dinotasikan dalam kalimat matematika yang dapat dikatakan sebagai petidaksamaan. Contoh (1) dapat dinotasikan $A < B$, contoh (2) $A > N$, contoh (3) sisa tabungan $\geq$ Rp. 2.000.000,00; dan contoh (4) Uang jajan Badru $\leq$ Rp. 5.000,00.

Notasi "<" dapat dibaca "lebih kecil (daripada) / lebih sedikit (daripada) / lebih pendek (daripada)", notasi ">" dapat dibaca "lebih besar (daripada)/ lebih banyak (daripada) / lebih panjang (daripada)", notasi "≥" dapat dibaca "lebih besar atau sama dengan / lebih banyak atau sama dengan/ lebih panjang atau sama dengan/ paling kecil / paling sedikit / paling pendek ", sedangkan notasi "≤" dapat dibaca "lebih kecil atau sama dengan / lebih sedikit atau sama dengan / lebih pendek atau sama dengan / paling besar / paling paling / paling panjang ".

Untuk menggambar notasi pertidaksamaan tersebut dapat dibuat garis bilangan dalam istilah "selang terbuka atau selang tertutup", selang terbuka menunjuk kepada "lebih kecil/ lebih besar (< atau >)" dan selang tertutup menunjuk kepada "lebih besar atau sama dengan/ lebih kecil atau sama dengan $(\geq \textit{atau} \leq)$".

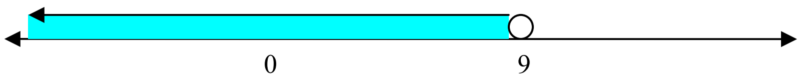
Contoh 1

Buat garis bilangan yang dinyatakan pada kalimat berikut ini:

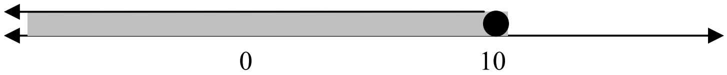
a. Bilangan ganjil kurang dari 9
b. Bilangan genap paling besar 10
c. $\{x \mid 1 < x < 5$, x anggota bilangan bulat$\}$
d. $\{ x \mid 0 \leq x \leq 6$

Jawab:

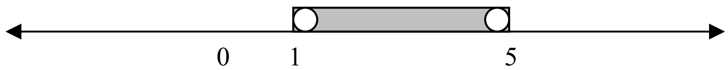
a. Bilangan ganjil kurang dari 9



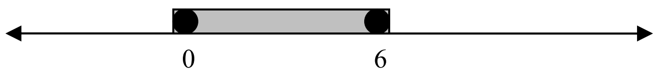
b. Bilangan genap paling besar 10



c. {x | 1 < x < 5, x anggota bilangan bulat}



d. { x | 0 ≤ x ≤ 6



Penyelesaian pertidaksamaan pada dasarnya sama dengan penyelesaian persamaan, yaitu menggunakan prinsip penjumlahan dan atau perkalian, hanya saja jika kedua ruas dikalikan dengan bilangan negatif yang sama, tanda harus diubah dari $<$ atau $\leq$ menjadi $>$ atau $\geq$, dan sebaliknya dari $>$ atau $\geq$ menjadi $<$ atau $\leq$.

Contoh 2

Tentukan himpunan penyelesaian (Hp) dari pertidaksamaan

$2x + 3 < 9$

Jawab :

$2x + 3 < 9$

$2x + 3 - 3 < 9 - 3$

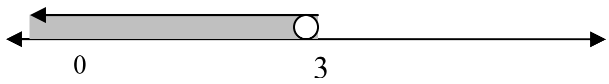
$2x < 6$

$$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2}$$

$x < 3$

Hp = {x | x < 3 ; x ∈ R }.

Hp tersebut dapat di gambarkan dengan garis bilangan sebagai berikut :



Contoh 3.

Tentukan himpunan penyelesaian persamaan: 3x + 2 ≥ 5x -2 dan amati apakah dalam penyelesaian persamaan ini terjadi perubahan tanda, jelaskan!

Jawab:

$3x + 2 \geq 5x - 2$

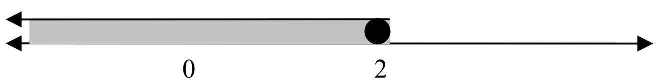
$3x - 5x \geq -2 - 2$

$-2x \geq -4$

$x \leq 2$ (mengapa tandanya berubah?)

Hp = {x | x ≤ 2 ; x ∈ R }.

Hp tersebut dapat di gambarkan dengan garis bilangan sebagai berikut :



Perlu diingat bahwa pada pertidaksamaan atau ketidaksamaan, jika kedua ruas dikalikan dengan bilangan negatif, maka tanda ketidaksamaan atau pertidaksamaan tersebut berubah ke lawannya. Sebagai ilustrasi,

$2 < 5$ dan $(-1)(2) > (-1)(5)$ atau $-2 > -5$.

Sistem Persamaan Linear

Kita akan mulai pembahasan ini dengan memperhatikan masalah berikut:

Di Pasar Baru Bandung seorang ibu membeli 1 kg cabe keriting dan 2 kg bawang merah dengan harga Rp. 80.000,00. Ia membeli lagi 1 kg cabe keriting dan 1 kg bawang merah dengan harga Rp. 60.000,00. Berapa harga 1 kg cabe keriting dan harga 1 kg bawang merah di pasar itu?

Untuk menyelesaikan masalah di atas, kita dapat melakukan langkah-langkah

tertentu, dimulai dengan membuat model matematikanya, kemudian dilanjutkan secara berturut-turut menyelesaikan model matematika itu dan menafsirkan hasil penyelesaian itu untuk menjawab masalah semula.

Model matematika untuk masalah di atas dapat disajikan dalam bentuk seperti berikut:

Misalkan: x adalah harga 1 kg cabe keriting

y adalah harga 1 kg bawang marah.

$$\begin{pmatrix} x + 2y = 80000 \\ x + y = 60000 \end{pmatrix}$$

Jika persamaan pertama dikurangi persamaan ke dua, diperoleh y = 20000

Karena y = 20000, diperoleh x = 40000.

Dengan demikian, harga 1 kg cabe keriting adalah Rp. 40.000,00 dan harga 1 kg bawang marah adalah Rp. 20.000,00.

Jika kita substitusikan hasil-hasil tersebut ke sistem persamaannya, maka akan diperoleh

$$\begin{pmatrix} 40000 + (2 \times 20000) = 80000 \\ 40000 + 20000 = 60000 \end{pmatrix}$$

yang merupakan pernyataan-pernyataan dengan nilai kebenaran benar.

Jika kita perhatikan kembali persamaan

$$\begin{pmatrix} x + 2y = 80000 \\ x + y = 60000 \end{pmatrix}$$

maka tampak ada dua persamaan linear yang diikat menjadi satu kesatuan oleh tanda kurung dan setiap persamaan linear itu mempunyai dua variabel. Bentuk persamaan seperti ini dinamakan **sistem persamaan linear dua variabel.**

Bentuk umum sistem persamaan linear dua variabel adalah;

$$\begin{pmatrix} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{pmatrix}$$

Terdapat beberapa cara menyelesaikan sistem pertidaksmaan linear dua variabel, diantaranya adalah eliminasi, substitusi, dan grafik.

Contoh

Selesaikan sistem persamaan berikut.

$$\begin{pmatrix} 2\text{x} \;\; \text{y} = 4 \\ \text{x} + 2\text{y} = -3 \end{pmatrix}$$

Jawab:

Untuk menyelesaiakan dua persamaan tersebut dapat dilakukan dengan cara mengeliminasi (menghilangkan) salah satu variabel, mensubstitusi persamaan yang satu ke persamaan yang lainnya, dan menggunakan gambar grafik.

Cara 1: Eliminasi

2x – y = 4 (kalikan dengan 2) $\Rightarrow$ 4x – 2y = 8

x + 2y = -3

Jumlahkan persamaan (1) dengan persamaan (2), sehingga menjadi:

(1) 4x – 2y = 8

(2) x + 2y = -3 +

5x = 5

x = 1

Dari x = 1 dan persamaan 4x – 2y = 8, diperoleh

(4)(1) – 2y = 8

-2y = 8 – 4

y = -2

Jadi, HP = {1, -2}

Cara 2 : Substitusi

Untuk memudahkan perhitungan ambil salah satu persamaannya, misalnya persamaan (2).

$x + 2y = -3$

$x + 2y = -3$

$x = -2y - 3$

Substitusikan persamaan terakhir ini ke persamaan (1) shingga diperoleh

$4(- 2y - 3) - 2 y = 8$

$-8y - 12 - 2y = 8$

$-10y = 20$

$y = -2$

Kita substitusikan y = -2 ke salah satu persamaan awal, misalnya persamaan (2), sehingga diperoleh

$x + 2(-2) = -3$

$x = 1$

Jadi, HP = {1, -2}

Cara 3 : Grafik

Kita membuat grafik kedua persamaan tersebut dan mencari titik potongnya. Titik potong itu merupakan penyelesaian sistem persamaannya.

(1) $2x - y = 4$

Untuk $x = 0 \Rightarrow y = -4$

Untuk $x = 1 \Rightarrow y = -2$

Untuk $x = 2 \Rightarrow y = 0$

Untuk $x = 3 \Rightarrow y = 2$

(2) $x + 2y = -3$

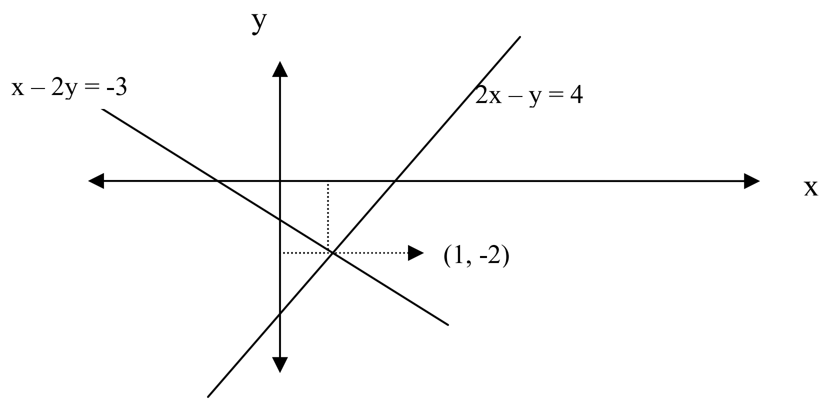
Untuk $x = 0 \Rightarrow y = -1\frac{1}{2}$

Untuk $x = 1 \Rightarrow y = -2$

Untuk $x = 2 \Rightarrow y = -2\frac{1}{2}$

Untuk $x = 3 \Rightarrow y = -3$

Grafiknya adalah sebagi berikut:



Karena titik potong kedua grafik tersebut (1, -2), penyelesaian sistem persamaan itu adalah: x = 1 dan y = -2.

Dengan demikian,

Hp = {1, -2}

Sistem Pertidaksamaan Linear

Seperti halnya dalam persamaan, dalam pertidaksamaan kita juga mempunyai sistem pertidaksamaan linear. Sistem pertidalsamaan yang dibahas pada bagian ini adalah sistem pertidaksamaan linear satu variabel.

Bentuk umum sistem pertidaksamaan linear dua variabel adalah,

$$\begin{pmatrix} A_1 x + B_1 < 0 \\ A_2 x + B_2 < 0 \end{pmatrix}$$

Tanda ”<” pada sistem pertidaksamaan di atas dapat pula diganti dengan tanda pertidaksamaan lainnya, seperti ”>, $\geq$, $\leq$, atau $\neq$).

Untuk menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear satu variabel kita dapat menggunakan irisan penyelesaian pertidaksamaan-pertidaksamaannya.

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut ini dan buat gambarnya.

$$\begin{pmatrix} -2x + 4 \leq -x + 3 \\ 2x - 3 < x \;\; 1 \end{pmatrix}$$

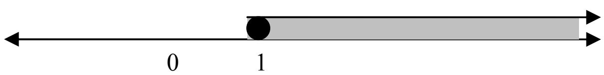
Jawab:

$-2x + 4 \leq -x + 3$	dan	$2x - 3 < x - 1$
$-2x + x \leq 3 - 4$		$2x - x < 3 - 1$
$-x \leq -1$		$x < 2$
$x \geq 1$		

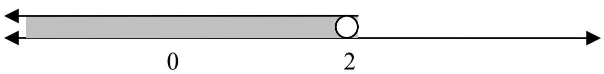
Hp= $\{x \mid 1 \leq x < 2\}$

Kita dapat menunjukkan penyelesaian sistem pertidaksamaan di atas dengan menggunakan gambar garis bilangan.

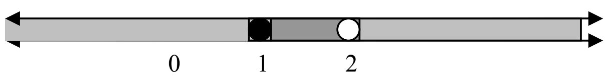
Pertidaksamaan $-2x + 4 \leq -x + 3$ atau $x \geq 1$ dapat dinyatakan dalam garis bilangan sebagai berikut:



Pertidaksamaan $2x - 3 < x - 1$ atau $x < 2$ dapat dinyatakan dalam garis bilangan sebagai berikut:



Jika kedua gambar di atas diiriskan menjadi sebagai berikut.



Dari irisan dua gambar di atas terlihat bahwa x yang memenuhi pertidaksamaan $-2x + 4 \leq -x + 3$ dan $2x - 3 < x - 1$ adalah x paling kecil 1 dan x lebih kecil 2 atau ditulis dengan himpunan penyelesaian,

Hp = $\{x \mid 1 \leq x < 2\}$

Soal-soal Latihan

1. Hitunglah nilai x dari soal-soal berikut:
   a. $x + 8 = 10$
   b. $x - 12 = -18$
   c. $2x + 3 = 12$
   d. $3x - (x + 6) = 3 (x -4)$
   e. $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 10$

2. Dalam suatu gelas ada sejumlah kelereng, setelah ditambahkan 3, maka kelereng tersebut dalam gelas menjadi 15. Berapakah kelereng semula yang ada pada gelas buat model persamaannya.
3. Harga 5 gunting dan 4 catter Rp. 48.000,00, sedangkan harga 2 gunting dan 1 catter sama dengan Rp. 16.500,00. Berapakah harga 1 gunting dan harga 1 catter?

4. Tentukan nilai x dan buat selangnya untuk pertidaksamaan: $4x - 9 < -5x + 9$
5. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan: $3x + 4 \geq 5x - 6$

Jawaban Soal-soal latihan.

1. Nilai x dari soal-soal berikut:
   a. $x + 8 = 10$
      $x = 2$
   b. $x - 12 = -18$
      $x = -6$
   c. $2x + 3 = 12$
      $x = 4\frac{1}{2}$
   d. $3x - (x + 6) = 3 (x -4)$
      $3x - x - 6 = 3x -12$
      $-x = -12$
      $x = 12$
   e. $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 10$

$$\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{5}\right).20=10.20$$

$$5x+4x=200$$

$$x=\frac{200}{9}$$

2. Jumlah kelereng semua adalah x, maka persmaan yang dapat dibiuat x + 3 = 15. Jadi kelereng semua adalah 15 -3 = 12
3. Harga 5 gunting dan 4 catter Rp. 48.000,00, sedangkan harga 2 gunting dan 1 catter sama dengan Rp. 16.500,00. Berapakah harga 1 gunting dan harga 1 catter?

   Misalkan gunting = x dan catter = y , maka persamaan yang terbentuk adalah:

   (1) 5x + 4y = 48000

   (2) 2x + y = 16500

   Persamaan (2) y = 16500 – 2x, masukan ke persamaan (1) 5x + 4y = 48000 menjadi

   5x + 4(16500 – 2x) = 48000

   5x + 66000 – 8x = 48000

   -3x = -18000

   x = 6000

   Karena x = 6000, maka persamaan (2) menjadi

   2(6000) + y = 16500

   y = 16500 – 12000

   y = 4500

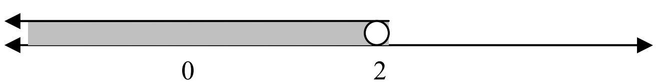
   Jadi harga x atau gunting = Rp 6.000,00 dan harga y atau catter = Rp. 4.500,00

4. Tentukan nilai x dan buat selangnya untuk pertidaksamaan: 4x - 9 $<$ -5 x + 9

   9x $<$ 18

   x $<$ 2

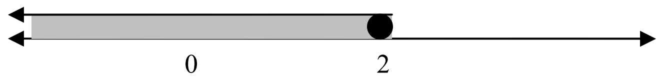
   selangnya adalah



5. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan: $3x + 4 \geq 5x - 6$

   $-2x \geq -10$

   $x \leq 2$



Rangkuman

1. Kalimat matematika yang mengandung satu atau lebih peubah (variabel) yang dihubungkan dengan relasi „=" disebut persamaan. Dan penyelesaian untuk suatu persamaan adalah sembarang bilangan yang membuat persamaan itu benar jika bilangan itu disubstitusikan (digantikan) pada peubah /variabel.
2. Prinsip penjumlahan, a, b, dan c bilangan real berlaku $a + b = a + c$ jika dan hanya jika $b = c$, atau berlaku $a - c = b - c$. Sedangkan prinsip perkalian, a, b, dan bilangan real berlaku $a \cdot c = b \cdot c$, jika dan hanya jika $a = b$, atau berlaku $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ dengan syarat $c \neq 0$.
3. Bentuk umum persamaan linear satu peubah adalah $ax + b = c$ dengan a, b, dan c bilangan real dan $a \neq 0$, dan teknik penyelesaian secara umum adalah:

   $ax + b = c, a \neq 0$

   $ax + b - b = c - b$

   $$\frac{ax}{a} = \frac{c-b}{a}$$

   $$x = \frac{c-b}{a}$$

4. Penyelesaian pertidaksamaan pada dasarnya sama dengan penyelesaian persamaan, yaitu menggunakan prinsip penjumlahan dan atau perkalian, hanya saja jika kedua ruas dikalikan dengan bilangan negatif yang sama, tanda harus diubah dari $<$ atau $\leq$ menjadi $>$ atau $\geq$, dan sebaliknya dari $>$ atau $\geq$ menjadi $<$ atau $\leq$.

TES FORMATIF 1

Petunjuk: Pilihlah salah satu jawaban yang anda anggap paling tepat!

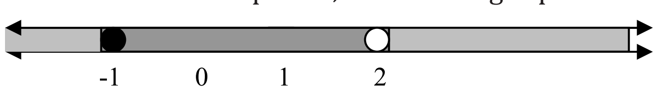
1. Nilai x yang memenuhi persamaan $5x + 6 = 2x - 9$ adalah
   a. -5
   b. 5
   c. 6
   d. -6

2. Nilai y yang memenuhi persamaan : $3y - 2(y - 1) = 4(y + 2)$ adalah
   a. 2
   b. -2
   c. 3
   d. 4

3. Nilai x yang memenuhi persamaan: $\sqrt{2x-4} = 6$
   a. 6
   b. -6
   c. 20
   d. -20

4. Carilah nilai x untuk pertidaksamaan: $\frac{x}{2} - \frac{1}{3} < \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$
   a. $x > -5$
   b. $x > -5$
   c. $x < -5$
   d. $x < -5$

5. Jika dinyatakan dalam bentuk himpunan, maka selang seperti berikut adalah

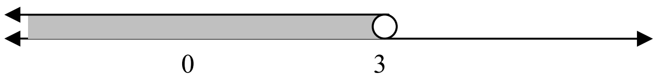


   a. $\{x \mid -1 > x \leq 2\}$
   b. $\{x \mid -1 \leq x > 2\}$
   c. $\{x \mid -1 \geq x < 2\}$

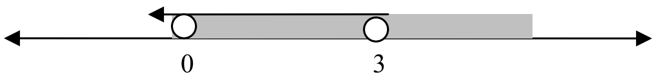
d. {x | -1 ≤ x < 2}

6. Selang dari pertidaksamaan: 6x – 2 < 2x + 10 adalah 7.

a.

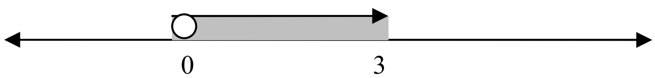


.

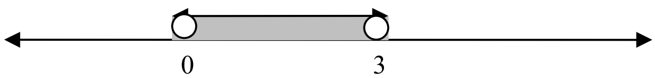


b.

c.



d.



8. Himpunan penyelesaian persamaan 2x – y = 11 dan x + 2y = 3 adalah ...
   a. {7, 2}
   b. {-7, -2}
   c. {-2, 7}
   d. {7, -2}

9. Harga 4 buku dan 3 pensil adalah Rp 10.100,00
   Harga 3 buku dan 5 pensil adalah Rp 9.500,00

   Ahmad membeli 6 buku dan 2 pensil dengan membayar Rp 20.000,00. Uang kembaliannya adalah ...
   a. Rp 6.000,00
   b. Rp 6.500,00
   c. Rp 6.600,00
   d. Rp 6.650,00

10. Jumlah uang Amir dan uang Budi adalah Rp 20.000,00, jumlah uang Budin dan Cucu adalah Rp 35.000,00, sedangkan jumlah uang Cucu dan Amir adalah Rp 50.000,00.

Uang Amir, Budi dan Cucu berturut-turut adalah ...

a. Rp. 17.500,00 ; Rp 32.500,00; Rp 2.500,00

b. Rp. 32.500,00; Rp. 17.500,00 ; Rp 2.500,00

c. Rp 2.500,00; Rp 32.500,00; Rp. 17.500,00

d. Rp. 17.500,00 ; Rp 2.500,00; Rp 32.500,00

11. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x - 1 > -2x + 5$ dan $-x - 3 \leq -6$ adalah

a. $\{x \mid 2 > x \geq 3\}$

b. $\{x \mid 2 < x \geq 3\}$

c. $\{x \mid 2 < x < 3\}$

d. $\{x \mid 2 < x \leq 3\}$

Balikan dan Tindak Lanjut

Cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban Anda yang benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar .

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 % - 100 % = baik sekali

80 % - 89 % = baik

70 % - 79 % = cukup

< 70 % = kurang

Kalau tingkat penguasaan Anda di atas 80 %, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80 %, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

Persamaan dan Pertidaksamaan Kuadrat

Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat adalah suatu persamaan dengan satu variabel atau lebih dengan pangkat tertinggi pada variabelnya dua. Pada bagian ini kita membatasi pembahasannya hanya pada persamaan kuadrat dengan satu variabel. Bentuk umum persamaan kuadrat satu variabel adalah

$ax^2 + bx + c = 0$, dengan syarat $a \neq 0$.

Persamaan-persamaan berikut termasuk persamaan kuadrat (mengapa?)

(1) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

(2) $x^2 - 7x - 18 = 0$

Kedua persamaan di atas pangkat tertinggi pada variabelnya (x) adalah dua, sehigga kedua persamaan tersebut termasuk persamaan kuadrat.

Bagaimana mencari penyelesaian sebuah persamaan kuadrat?

Untuk mencari pola penyelesaiannya, perhatikan langkah-langkah berikut:

Diketahui persamaan kuadrat

$ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0$.

Persamaan itu dapat diubah bentuknya menjadi:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}) = 0$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 = 0$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} \text{ atau } x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

Karena terdapat dua buah x, penyelesaian itu dapat ditulis

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

Karena

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2a} \text{ dan } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

Kita peroleh,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ dan}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

Hasil penyelesaian persamaan kuadrat dalam bentuk x_1 dan x_2. Nilai x_1 dengan nilai x_2 dapat sama atau tidak sama. x_1 dan x_2 disebut akar-akar persamaan kuadrat, $\{x_1, x_2\}$ disebut himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat, dan $b^2 - 4ac$ disebut diskriminan, dan disingkat $D = b^2 - 4ac$.

Dengan melihat nilai diskriminan (D), yaitu positif, negatif, atau nol, jenis-jenis akar persamaan kuadrat dapat diketahui. Hal tersebut dapat diketahui.

1) Jika $D > 0$, maka kedua akarnya adalah bilangan Real dan berbeda
2) Jika $D = 0$, maka kedua akarnya adalah bilangan Real dan kembar /sama.
3) Jika $D < 0$, maka kedua akarnya adalah bilangan kompleks dan berbeda.

Ada beberapa cara dalam menyelesaikan persamaan kuadrat, yaitu dengan faktorisasi, menjadikan kuadrat sempurna, dan rumus "abc".

Contoh 1.

Carilah himpunan penyelesaian persamaan kuadrat berikut dengan faktorisasi, menjadikan kuadrat sempurna, dan rumus abc. .

a. $x^2 + 6x + 5 = 0$.

b. $x^2 + 6x + 9 = 0$.

Jawab.

a. Dengan faktorisasi.

$x^2 + 6x + 5 = 0$. dapat dinyatakan sebagai

$(x + 5)(x + 1) = 0$

$x + 5 = 0$ atau $x + 1 = 0$

$x_1 = -5$ dan $x_2 = -1$

Hp = $\{-5, -1\}$

Dengan menjadikan kuadrat sempurna

$x^2 + 6x + 5 = 0$. dapat dinyatakan sebagai

$x^2 + 6x + 9 - 9 + 5 = 0$.

$(x^2 + 6x + 9) - 4 = 0$

$(x + 3)^2 - 2^2 = 0$

$(x + 3 + 2)(x + 3 - 2) = 0$

$(x + 5)(x + 1) = 0$

$x + 5 = 0$ atau $x + 1 = 0$

$x_1 = -5$ dan $x_2 = -1$

Hp = {-5, -1}

Dengan rumus ”abc”

$x^2 + 6x + 5 = 0$. dapat dipandang a = 1, b = 6, dan c = 5

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

$$x_{12} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x_{12} = \frac{-6 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6+4}{2}, \text{ dan } x_2 = \frac{-6-4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2}{2} = -1, \text{ dan } x_2 = \frac{-10}{2} = -5$$

Hp = {-5, -1}

b.. Dengan faktorisasi.

$x^2 + 6x + 9 = 0$ dapat dinyatakan sebagai

$(x + 3)\ (x -+3) = 0$

$x + 3 = 0$ atau $(x + 3) = 0$

$x_1 = -3$, $x_2 = -3$

Hp = {-3}

Dengan menjadikan kuadrat sempurna

$x^2 + 6x + 5 = 0$. dapat dinyatakan sebagai

$(x + 3)^2 = 0$

$x + 3 = 0$

$x = -3$

Hp = {-3}

Dengan rumus ”abc”

$x^2 + 6x + 5 = 0$

$x^2 + 6x + 5 = 0$. dapat dipandang a = 1, b = 6, dan c = 5

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}$$

$$x_{12} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(9)}}{2(1)}$$

$$x_{12} = \frac{-6 \pm 0}{2}$$

$x_1 = x_2 = -3$

Hp = {-3}

Contoh 2

Diketahui dua bilangan, jika dikalikan menjadi 12 dan jika dijumlahkan sama dengan 7. Bilangan berapakah yang dimaksud?

Jawab:

Untuk menjawab soal tersebut cobalah Anda membuat table seperti berikut:

m . n = 12	
M	n
1	12
2	6
3	4

m + n = 7	
M	n
1	6
2	5
3	4

Dengan melihat bilangan yang sama pada kedua table di atas kita sudah dapat menentukan bahwa m = 3 dan n = 4 atau m = 4 dan n = 3 (sifat komutatif).

Dengan cara lain, yaitu dengan cara berpikir matematis kita akan mendapatkan nilai m dan n, ikutilah petuntuk berikut ini

Misalkan bilangan pertama adalah m dan bilangan kedua adalah n, maka persamaan yang didapat adalah:

$m . n = 12$ dan $m + n = 7$

Untuk($m = 7 - n$), maka ($m . n = 12$) menjadi

$(7 - n) . n = 12$
$7n - n^2 = 12$
$n^2 - 7n + 12 = 0$
$(n - 3)(n - 4) = 0$
$n - 3 = 0$ atau $n - 4 = 0$
$n_1 = 3$ $n_2 = 4$
Untuk n = 3, maka (m . n = 12) adalah 3m = 12, jadi m = 4
Jadi bilangan yang dimaksud adalah {4, 3}
Pengecekan: 4 . 3 = 12 dan 4 + 3 = 7

Contoh 3

Carilah akar-akar persamaan kuadrat dengan cara faktorisasi!:

1) $2x^2 - 4x = 0$

2) $x^2 - 4 = 0$

3) $m^2 - 2m + 1 = 0$

4) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

5) $x^2 - 7x - 18 = 0$

Jawab:

1) $2x^2 - 4x = 0$

$2x(x - 2) = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x = 0$ atau $x = 2$

2) $x^2 - 4 = 0$

$(x + 2)(x - 2) = 0$

$x + 2 = 0$ atau $x - 2 = 0$

$x = -2$ atau $x = 2$

3) $m^2 - 2m + 1 = 0$

$(m - 1)(m - 1) = 0$

$m - 1 = 0$ atau $m - 1 = 0$

$m = 1$

4) $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$(3x - 1)(x + 2) = 0$

$3x - 1 = 0$ atau $x - 2 = 0$

$x = \frac{1}{3}$ atau $x = -2$

5) $x^2 - 7x - 18 = 0$

$(x - 9)(x + 2) = 0$

$x - 9 = 0$ atau $x + 2 = 0$

$x = 9$ atau $x = -2$

Contoh 4

Tentukan Hp dari persamaan $x^2 - 4x - 12 = 0$ dengan cara menjadikannya kuadrat sempurna

Jawab:

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$x^2 - 4x + 4 - 4 - 12 = 0$

$(x^2 - 4x + 4) - (12 + 4) = 0$

$(x - 2)^2 - 4^2 = 0$

$(x - 2 + 4)(x - 2 - 4) = 0$

$x - 2 - 4 = 0$ atau $x - 2 + 4 = 0$

$x = 6$ atau $x = -2$

Jadi Hp $= \{6, -2\}$

Contoh 5

Tentukan Hp dari persamaan $2x^2 - 7x + 3 = 0$ dengan rumus ”abc”!

Jawab:

Jawab :

a = 2

b = -7

c = 3

$$D = b^2 - 4\,ac$$

$$= (-7)^2 - 4.\,2.\,3$$

$$= 49 - 24$$

$$= 25$$

$$Hp = \left\{ \frac{-(-7)+\sqrt{25}}{2,2} , \frac{-(-7+\sqrt{25}}{2,2} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{7+5}{4} \quad , \quad \frac{7-5}{4} \right\}$$

$$= \left\{ 3 \quad , \quad \frac{1}{2} \right\}$$

Contoh 6.

Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan $3x^2 + 14x - 5 = 0$. Tentukanlah !

a) $x_1 + x_2$

b) $x_{1\,.}\,x_2$

c) $(x_1)^2 + (x_2)^2$

Jawab.

Dengan memperhatikan bentuk umum persamaan kuadrat

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

Kita dapat pandang persamaan

$3x^2 + 14x - 5 = 0$ mempunyai $a = 3$, $b = 14$, dan $c = -5$

Dengan demikian,

a) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

$= -\dfrac{14}{3}$

$= -4\dfrac{2}{3}$

b) $x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a}$

$= \dfrac{-5}{3}$

$= -1\dfrac{2}{3}$

c) $(x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 2\, x_1 . x_2 - 2\, x_1 . x_2$

$= (x_1 + x_2)^2 - 2\, x_1 . x_2$

$= \left(-4\dfrac{2}{3}\right)^2 - 2\left(-1\dfrac{2}{3}\right)$

$= \left(-\dfrac{14}{3}\right)^2 - 2\left(-\dfrac{5}{3}\right)$

$= \dfrac{196}{9} + \dfrac{10}{3}$

$= \dfrac{588 + 90}{27}$

$= \dfrac{678}{27}$

$= 25\ \dfrac{1}{9}$

Pertidaksamaan Kuadrat

Kegunan pertidaksamaan kuadrat tidak kalah pentingnya dengan persamaan kuadrat. Misal dalam mengendarai kendaraan bermotor berapa meter jarak aman untuk mobil yang berada dibelakangnya, agar tidak terjadi menabrak dari belakang. Untuk itu kita harus berhenti tidak melibihi posisi kendaraan yang ada di depan kita. Untuk mengetahui berapakah kecepatan maksimum kendaraan tersebut merupakan persoalan pertidaksamaan kuadrat. Tetapi berapakah jarak terpendek yang diperlukan untuk menghentikan kendaraan dengan kecepatan tertentu merupakan persoalan persamaan kuadrat.

Pertidaksamaan kuadrat adalah pertidaksamaan yang memiliki satu variabel atau lebih dengan pangkat atau berderajat 2

Bentuk umum pertidaksamaan kuadrat adalah:

1) $ax^2 + bx + c < 0$
2) $ax^2 + bx + c \leq 0$
3) $ax^2 + bx + c > 0$
4) $ax^2 + bx + c \geq 0$
5) $ax^2 + bx + c \neq 0$, dengan a , b . c bilangan real dan $a \neq 0$

Untuk menyelesaikan suatu pertidaksamaan kuadrat, adalah menentukan mencari himpunan penyelesaian dari persamaan kuadratnya yaitu

$ax^2 + bx + c = 0$ atau pandanglah bahwa pertidaksamaan kuadrat itu sebagai persamaan kuadrat. Langkah berikutnya adalah menggunakan garis bilangan untuk menentukan daerah penyelesaian dan diikuti dengan Tentukan nilai dari masing-masing daerah. Langkah-langkah penyelesaian ini disajikan dalam diagram sebagai berikut:

1) Langkah pertama	tentukan himpuanan penyelesaiannya sebagai persamaan kuadrat
2) Langkah ke dua	menggunakan garis bilangan untuk menentukan daerah penyelesaian
3) Langkah ke tiga	Tentukan nilai dari masing-masing daerah

Contoh 1

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x^2 + 6x - 7 > 0$

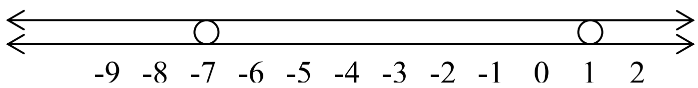
Jawab.

Untuk mencari himpunan penyelesaian pertidaksamaan tersebut, maka terlebih dahulu kita harus menentukan himpunan penyelesaian persamaan $x^2 + 6x - 7 = 0$.

$(x - 1).(x + 7) = 0$

$x - 1 = 0$ atau $x + 7 = 0$

$x = 1$ atau $x = -7$



Dalam selang atau garis bilangan di atas terdapat tiga daerah, yaitu: daerah $x < -7$, daerah $-7 < x < 1$, dan daerah $x > 1$. Untuk keperluan menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x^2 + 6x - 7 > 0$, periksalah ketiga daerah tersebut, mana yang memenuhi/ membuat benar pertidaksamaan itu.

Untuk daerah $x < -7$, ambil $x = -8$, pertidaksamaan menjadi $(-8)^2 + 6(-8) - 7 > 0$

$64 + (-48) -7 > 0$

$9 > 0 \Rightarrow$ pernyataan yang benar (memenuhi pertidaksamaan)

Untuk daerah $-7 < x < 1$, ambil $x = -1$, pertidaksmaan menjadi $(-1)^2 + 6(-1) -7 > 0$

$1 + (-6) - 7 > 0$

$-12 > 0 \Rightarrow$ pernyataan yang salah (tidak memenuhi pertidaksamaan)

Untuk daerah $x > 1$, ambil $x = 2$, pertidaksamaan menjadi $(2)^2 + 6(2) - 7 > 0$

$4 + 12 - 7 > 0$

$9 > 0 \Rightarrow$ pernyataan yang benar (memenuhi pertidaksamaan)

Jadi, Hp = $\{x < -7$ atau $x > 1\}$

Contoh 2

Tentukan Hp dari $x^2 + 11x + 10 \leq 0$

Jawab.

Untuk mencari himpunan penyelesaian pertidaksamaan tersebut, maka terlebih dahulu kita harus menentukan himpunan penyelesaian persamaan

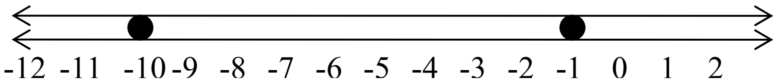
$x^2 + 11 + 10 = 0$

$(x + 1)(x + 10) = 0$

$x = -1$ atau $x = -10$

Hp $= \{-10 , -1\}$

$(x + 1)\ (x + 10) \leq 0$



Garis bilangan di atas ada tiga daerah, yaitu: $x \leq -10$, $-10 \leq x \leq -1$, dan $x \geq -1$. Sehubungan dengan tiga daerah tersebut, periksalah daerah mana saja yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 + 11x + 10 \leq 0$

1) untuk $x \leq -10$ ambil $x = -11$ maka $(-11 + 1)\ (-11 + 10) = (-10) . (-1) = 10$, ternyata hasil yang didapat adalah 10, dan tentu saja bahwa sepuluh adalah lebih besar nol ($10 > 0$) . Sehingga untuk $x < -10$ bukan solusi pertidaksamaan $x^2 + 11x + 10 \leq 0$
2) untuk $-10 \leq x \leq -1$, ambil $x = -5$ sehingga $(-5 + 1)\ (-5 + 10) = -4 . 6 = -20$, -20 lebih kecil dari nol ($-20 < 0$). Sehingga untuk $-10 \leq x \leq -1$ merupakan solusi dari pertidaksamaan $x^2 + 11x + 10 \leq 0$
3) untuk $x \geq -1$ ambil $x = 0$ maka $(0 + 1)\ (0 + 10) = 1$, ternyata hasil yang didapat adalah 1, dan tentu saja bahwa 1 adalah lebih besar nol ($1 > 0$).Sehingga untuk $x > -1$ bukan solusi pertidaksamaan $x^2 + 11x + 10 \leq 0$

Sebagai gambaran, lihatlah selang bilangan berikut.



dengan daerah solusi x antara –10 sampai dengan –1 atau

Hp : { x ! $-10 < x < -1$}

Latihan Soal 2

1. Diketahui dua bilangan, jika dikalikan sama dengan $\frac{2}{15}$ dan jika dijumlahkan sama dengan $\frac{13}{15}$. Bilangan berapakah yang dimaksud?

2. Carilah akar-akar persamaan kuadrat!:
   a. $x^2 + 5x = 0$
   b. $y^2 = 1$
   c. $m^2 + 2m - 3 = 0$
   d. $x^2 + 2x + 2 = 0$
   e. $3x^2 - 2x - 1 = 0$
3. Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan $\frac{5}{4}x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$. Tentukanlah !
   a. $x_1 + x_2$

a. $x_1 . x_2$
b. $(x_1)^2 + (x_2)^2$

4. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan
   a. $(x - 2)(x + 4) > 0$
   b. $3x^2 - 2x - 1 < 0$

Petunjuk Jawaban Latihan Soal 2

1. Diketahui dua bilangan, jika dikalikan samadengan $\frac{2}{15}$ dan jika dijumlahkan sama dengan $\frac{13}{15}$.

$$x_1 + x_2 = \frac{13}{15} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{13}{15} - x_2$$

$$x_1 . x_2 = \frac{2}{15} \Leftrightarrow \left(\frac{13}{15} - x_2\right). x_2 = \frac{2}{15}$$

$$\left(\frac{13}{15} - x_2\right). x_2 = \frac{2}{15}$$

$$\frac{13}{15}x - (x_2)^2 = \frac{2}{15}$$

$$(x_2)^2 - \frac{13}{15}x + \frac{2}{15} = 0 \text{ (Persamaan kuadrat)}$$

Dengan menggunakan rumus "abc" akan kita peroleh bilangan-bilangan yang dimaksud.

2. Mencari akar-akar persamaan kuadrat:
   a. Anda dapat menggunakan faktorisasi agar pekerjaan lebih cepat.
   b. Jadikan dahulu bentuk $y^2 - 1 = 0$, selanjutnya gunakan faktorisasi.
   c. Untuk persamaan "$m^2 + 2m - 3 = 0$" gunakan faktorisasi.
   Perhatikan hasil kali kedua bilangan itu -3 dan hasil penjumlahannya 2.
   d. Untuk persamaan $x^2 + 2x + 2 = 0$ sulit difaktorkan, untuk itu carilah "D"nya. Selanjutnya gunakan rumus "abc".
   e. Untuk persamaan $3x^2 - 2x - 1 = 0$, pertama kita dapat memfaktorkannya persamaan itu menjadi
   $(x - 1)(3x + 1) = 0$.
   Jika sulit memfaktorkan pers

   $3x^2 - 2x = 1$

$x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}$ maan itu, gunakan rumus ”abc”

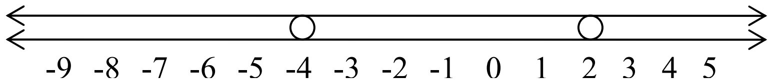
3. Diketahui persamaan $\frac{5}{4}x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$.

   a. Untuk mencari $x_1 + x_2$ ingat rumus $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

   b. Untuk mencari $x_1 . x_2$ ingat rumus $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

   c. Untuk mencari $(x_1)^2 + (x_2)^2$ ingat bahwa $(x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2\, x_1 . x_2$

4. a. Untuk mencari himpunan penyelesaian pertidaksamaan $(x - 2)(x + 4) > 0$
   Persamaan kuadratnya: $(x - 2)(x + 4) = 0$
   Himpunan penyelesaiannya: {2, -4}
   Selang yang diperoleh : $(x < -4)$, $(-4 < x < 2)$, dan $(x > 2)$
   Gambar selang:



   Selanjutnya carilah daerah yang memenuhi pertidaksamaan itu.

   b. Untuk mencari himpunan penyelesaian pertidaksamaan 3x2 – 2x – 1 < 0
   kita dapat menmfaktorkannya sehingga menjadi $(x - 1)(3x + 1) < 0$. dan
   persamaan kuadratnya $(x - 1)(3x + 1) = 0$
   Himpunan penyelesiannya {1/3 , 1}
   Selanjutnya, ikuti seperti langkah-langkah pada 4a.

Rangkuman

1. Persamaan kuadrat adalah suatu persamaan dengan pangkat tertinggi pada variabel dua. Bentuk umumnya $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.
2. Hasil penyelesaian persamaan atau pertidaksamaan kuadrat dalam bentuk x_1 dan x_2. Nilai x_1 dengan nilai x_2 dapat sama atau tidak sama. x_1 dan x_2 disebut akar-akar persamaan kuadrat, $\{x_1, x_2\}$ disebut himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat, dan $b^2 - 4ac$ disebut diskriminan, dan disingkat D.
3. Cara dalam menyelesaikan persamaan kuadrat, yaitu dengan faktorisasi, melengkapkan kuadrat, dan rumus persamaan kuadrat ata sering disebut rumus “abc”.
4. Untuk menyelesaikan suatu pertidaksamaan kuadrat, dapat menggunakan langkahnya adalah mencari himpunan penyelesaian dari persamaan kuadratnya yaitu ax2 + bx + c = 0 atau pandanglah bahwa pertidaksamaan itu sebagai persamaan kuadrat, dilanjutkan dengan menentukan daerah penyelesaian menggunakan garis bilangan.

TES FORMATIF 2

Petunjuk: Pilihlah salah satu jawaban yang dianggap paling tepat !

1. Himpunan penyelesaian dari $-5x^2 + 9x + 2 = 0$ adalah
   a.. { - , 2}
   b.. {-1, 2}
   c. {, -2}
   d. {1, -2}

2. Persamaan kuadrat $x^2 - ax + a = 0$, mempunyai akar kembar untuk
   a. a = 4
   b. a = -4
   c.. a = 0 atau a = 4
   d. a = 0 atau a = -4

3. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya dan adalah :
   a. $20x^2 + 9x + 1 = 0$
   b. $20x^2 - 9x - 1 = 0$
   d. $20x^2 + 9x - 1 = 0$
   d. $20x^2 - 9x + 1 = 0$

4. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya nyata dan berlainan adalah :
   a. $x^2 + 8x - 4 = 0$
   b. $x^2 + 12x + 36 = 0$
   c. $x^2 + 3x + 4 = 0$
   d. $x^2 + 2x + 6 = 0$

5. Himpunan penyelesaian pertidaksaan: $\frac{2(6x+5)}{3} < 5x + 0$ adalah

   a. $\left\{ x \mid x > 6\frac{2}{3}, x \in R \right\}$

   b. $\left\{ x \mid x < -6\frac{2}{3}, x \in R \right\}$

   c. $\left\{ x \mid x > -6\frac{2}{3}, x \in R \right\}$

   d. $\left\{ x \mid x > -6\frac{2}{3}, x \in B \right\}$

6. $2x^2 + 3y - 6x \geq 8$ merupakan:
   a. persamaan linear satu variabel
   b. persamaan kuadrat dua variabel
   c. pertidaksamaan linear dua variabel
   d. pertidaksamaan kuadrat dua variabel

7. Nilai x yang memenuhi $x^2 \geq 3x + 10$ adalah:
   e. $\{x \mid x > 5, x < -2 ;\ x \in \Re\}$
   f. $\{x \mid x \geq 5, x \geq -2 ;\ x \in \Re\}$
   g. $\{x \mid x \geq 5, x \leq -3 ;\ x \in \Re\}$
   h. $\{x \mid -2 \leq x \leq 5 ;\ x \in \Re\}$

8. Bilangan asli terkecil yang memenuhi pertidak samaan $x(x + 1) > 100$ adalah:
   a. 9,7
   b. 10
   c. 10,5
   d. 9,75

9. Suatu kolam, memiliki lebar kurang 7 meter dari panjangnya. Jika keliling kolam tersebut 70 meter. Luas kolam tersebut adalah:
   a. 16 m^2
   b. 36 m^2
   c. 144 m^2
   d. 294 m^2

10. Jumlah dua bilangan sama dengan 12 dan hasil kalinya paling sedikit 27. Bentuk pertidaksamaan kuadratnya adalah ...
   a. $x^2 + 12x + 27 \geq 0$
   b. $x^2 - 12x - 27 \geq 0$
   c. $x^2 - 12x + 27 > 0$
   d. $x^2 - 12x + 27 \geq 0$

Balikan dan Tindak Lanjut

Cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban Anda yang benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 % - 100 % = baik sekali

80 % - 89 % = baik

70 % - 79 % = cukup

< 70 % = kurang

Kalau tingkat penguasaan Anda di atas 80 %, Anda dapat meneruskan ke Bahan belajar mandiri 2. Tetapi bila tingkat penguasaan Anda masih di bawah 80 %, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

KUNCI JAWABAN TEST FORMATIF

Test Formatif 1

1. a
2. b
3. c
4. b
5. d
6. a
7. d
8. c
9. d
10. b

Test Formatif 2

1. a
2. c.
3. d.
4. a.
5. a
6. c
7. a
8. a
9. d
10. d.

RELASI DAN FUNGSI

MODUL 6

RELASI DAN FUNGSI

PENDAHULUAN

Modul ini adalah bahan ajar ke enam dalam matakuliah Konsep Dasar Matematika, isinya membahas tentang relasi, fungsi, dan cara menyatakan fungsi. Dalam kegiatan belajar pertama akan dibahas tentang kalimat pernyataan, pengertian relasi dan pengertian fungsi. Sedangkan dalam kegiatan belajar kedua akan dibahas grafik suatu fungsi, menggambar grafik suatu fungsi, grafik fungsi linier, kemiringan dan fungsi linier, garis melalui suatu titik dengan kemiringan tertentu, dan persamaan garis melalui dua titik.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat memahami konsep relasi, fungsi dan cara menyatakan fungsi. Secara lebih khusus setelah anda mempelajari bahan belajar mandiri ini diharapkan dapat:

1. Menyatakan suatu relasi dengan diagram panah, himpunan pasangan berurutan, dan dengan grafik.
2. Menjelaskan definisi suatu relasi.
3. Menjelaskan definisi suatu fungsi.
4. Mengidentifikasi apakah suatu relasi tertentu merupakan fungsi atau bukan fungsi.
5. Menentukan daerah asal dan daerah hasil suatu fungsi.
6. Menentukan hasil operasi penjumlahan dan pengurangan suatu fungsi.
7. Menentukan hasil operasi perkalian dan pembagian fungsi-fungsi.
8. Menentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi baru yang merupakan hasil operasi penjumlahan dan pengurangan fungsi-fungsi.
9. Menentukan daerah asal dan daerah hasil fungsi baru yang merupakan hasil operasi perkalian dan pembagian fungsi-fungsi.
10. Menentukan komposisi fungsi jika fungsi-fungsi asalnya yang diketahui.
11. Menentukan daerah asal fungsi komposisi.
12. Menggambar grafik suatu fungsi linier dari beberapa titik yang diketahui.
13. Menentukan kemiringan suatu fungsi linier jika diketahui persamaannya.
14. Menentukan persamaan garis jika diketahui satu titik dengan kemiringan tertentu.
15. Menentukan persamaan garis jika diketahui i dua titik.

Agar anda berhasil dengan baik dalam mempelajri modul ini, ikutilah petunjuk-petunjuk berikut ini.

1. Bacalah dengan baik pendahuluan modul ini sehingga Anda memahami tujuan mempelajari modul ini dan bagaimana mempelajarinya.
2. Bacalah bagian demi bagian materi yang ada dalam modul ini, kalau perlu tandai kata-kata / kaliamat yang dianggap penting. Ucapkan dalam bahasa sendiri kata/kaliamat yang ditandai tersebut.
3. Pahami pengertian demi pengertian dari isi modul ini dengan mempelajari contoh-contohnya, dengan pemahaman sendiri,dan berdiskusi dengan kawan mahasiswa atau orang lain.
4. Kerjakan soal-soal latihan dalam modul ini tanpa melihat petunjuk penyelesaiannya lebih dulu. Apabila mendapat jalan buntu, barulah Anda melihat petunjuk penyelesaiannya. Jawaban Anda tidak perlu sama dengan petunjuk yang diberikan, karena kadang-kadang banyak cara yang dapat kita lakukan dalam menyelesiakan suatu permasalahan.
5. Kerjakan soal-soal tes formatif untuk mengukur sendiri tingkat penguasaan anda akan isi modul ini.

Sebagai acuan utama penulisan modul ini adalah: (1) buku karangan Billstein, Liberskind, dan Lot (1993), Problem Solving Approach to Mathematics for School Teachers, (2) buku karangan Purcell, E J dan Varberg, D (diterjemahkan oleh I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita, dan Rawuh)(1999), Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1, buku karangan Wheeler, Ruric E. (1992). Modern Mathematics, buku karangan Hudoyo, H dan Sutawidjaya, A (1996/1997), Matematik, dan (3) bahan belajar mandiri karangan Adjie, N, dan Rostika R.D, Konsep Dasar Matematika. Sedangkan sebagai rujukan tambahan penulisan modul ini adalah buku-buku logika matematika yang banyak beredar di pasaran.

Pengertian Relasi dan Fungsi

Pengertian Relasi

Pembahasan relasi tidak dapat dilepaskan dari produk kartesius. Sebagaimana telah di bahas di dalam modul 1, Pruduk kartesius dari A dan B, ditulis A X B, adalah himpunan semua pasangan terurut sedemikian sehingga elemen pertama setiap pasangan adalah elemen dari A dan elemen kedua dari setiap pasang adalah elemen dari B. Misalkan seseorang mempunyai tiga buah celana, C = {biru, pitih, hijau} dan dua baju, B = {biru, merah}. Pasangan-pasangan celana dan baju membentuk sebuah himpunan semua kemungkinan di mana unsur pertama dari pasangan adalah elemen C dan unsur ke dua dari pasangan adalah elemen B. Himpunan semua kemungkinan-kemungkinan itu adalah {(Biru, Merah), (Putih, Merah), (Hijau, Merah), (Biru, Biru), (Putih, Biru), (Hijau, Biru).

Perhatikan dua himpunan berikut:
A = Himpunan nama anak-anak pak Edi.
Himpunan A dapat ditulis dengan
A = {Adi, Budi, Candra, Deni}.
B = Himpunan cabang olah raga yang digemari anak-anak pak Edi.
Himpunan B dapat ditulis dengan
B = {Renang, Bola voli, Sepakbola}.

Pasangan-pasangan celana dan baju membentuk sebuah himpunan semua kemungkinan di mana unsur pertama dari pasangan adalah elemen A dan unsur ke dua dari pasangan adalah elemen B. Himpunan semua kemungkinan-kemungkinan itu adalah {(Adi, Renang), (Adi, Bola voli), (Adi, Sepak bola), (Budi, Renang), (Budi, Bola voli), (Budi, Sepakbola), (Candra, Renang), (Candra, Bola voli), (Candra, Sepakbola), (Deni, Renang), (Deni, Bola voli), (Deni, Sepakbola)}. Himpunan pasangan terurut ini dikatakan sebagai produk kartesius, A X B. Dengan demikian,

A X B = {(Adi, Renang), (Adi, Bola voli), (Adi, Sepak bola), (Budi, Renang), (Budi, Bola voli), (Budi, Sepakbola), (Candra, Renang), (Candra, Bola voli), (Candra, Sepakbola),

(Deni, Renang), (Deni, Bola voli), (Deni, Sepakbola)}.

Selanjutnya, perhatikan himpunan berikut:

{(Adi, Renang), (Budi, Bola voli), (Budi, Sepakbola), (Candra, Sepakbola), (Deni, Renang), (Deni, Bola voli)}.Kira-kira apa hubungan antara elemen pertama dan elemen ke dua pada himpunan ini? Bisa jadi, hubungannya adalah ”gemar”. Artinya Adi gemar renang, Budi gemar bola voli dan sepakbola, Candra gemar sepakbola, Deni gemar renang dan bolavoli. Hubungan antara elemen pertama dan elemen kedua pada himpunan itu dikatakan sebagai relasi dari A ke B, dinotasikan dengan R. Dengan demikian,

R = { {(Adi, Renang), (Budi, Bola voli), (Budi, Sepakbola), (Candra, Sepakbola), (Deni, Renang), (Deni, Bola voli)}.

Dari fakta A X B dan R, tampak bahwa relasi dari A ke B merupakan himpunan bagian dari produk kartesius A X B

ARB $\subset$ A X B

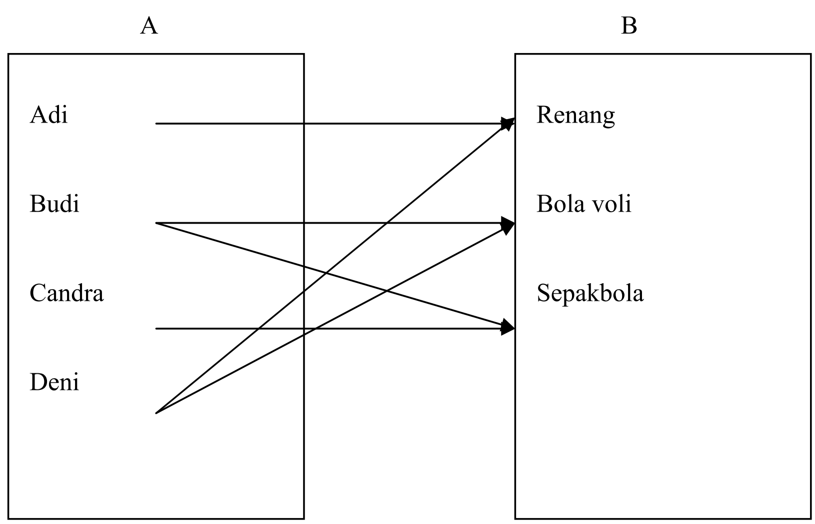
Dari uraian di atas, kita akan mendefinisi tentang relasi (R), sebagai berikut:

Relasi (R) dari himpunan A ke himpunan B, ditulis ARB adalah himpunan bagian dari produk kartesius himpunan A ke himpunan B, yaitu

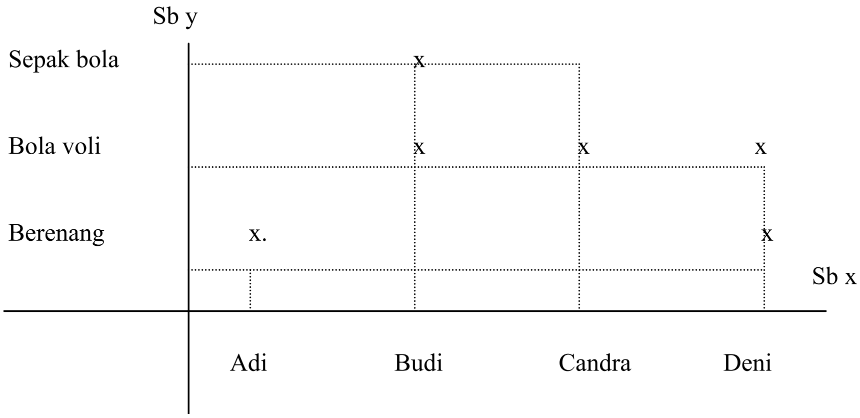
ARB $\subseteq$ A X B

Perlu diingat kembali bahwa relasi dari himpunan A ke himpunan B berbeda dengan relasi dari himpunan B ke ke himpunan A.

Untuk menyatakan sebuah relasi tidak hanya dengan menggunakan pasangan terurut. Beberapa cara lain untuk menyetakan sebuah relasi, adalah dengan menggunakan ”diagram panah” dan menggunakan ”grafik”. Penggunaan diagram panah pada kasus relasi himpunan A ke himpunan B dapat dilihat pada sajian diagram panah berikut ini.



Untuk menyajikan statu relasi dengan menggunakan grafik, kita harus menetapkan pada sumbu mana eleven-elemen himpunan A akan ditempatkan dan pada sumbu mana eleven-elemen himpunan B akan ditempatkan. Pada kasus relasi anak-anak pak Edi dengan kegemaran terhadap olahraga, kita tetapkan nama anak-anak pak Edi diletakkan pada sumbu x dan nama-nama jenis olahraga diletakkan pada sumbu y. Grafik yang menunjukkan relasi tersebut disajikan sebagai berikut:



Dalam kehidupan sehari-hari kita mengenal kata relasi atau hubungan. Misalnya relasi (hubungan) "bersaudara dengan". Ali bersaudara dengan Ani. Dalam hal ini kita berbicara tentang relasi antar anggota himpunan manusia. Contoh lain relasi dalam himpunan manusia adalah "kawan", misalnya Darsono kawan Sriwiyati, Ratih kawan Suniawan. Kedua relasi tersebut adalah relasi pada suatu himpunan yaitu himpunan manusia. Ada juga relasi antar dua himpunan yang berbeda. Misalnya relasi "gemar" antara himpunan pelajar dengan himpunan cabang olah raga: Amin gemar sepak bola, Tuti gemar berenang, Dian gemar voli. Daerah asal (domain) dari suatu relasi adalah himpunan yang anggotanya terdiri dari unsur-unsur pertama dari pasangan berurutan itu, sedangkan daerah hasil dari suatu relasi adalah himpunan yang anggotanya terdiri dari unsur-unsur kedua dari pasangan berurutan itu.

Contoh 1:

Diketahui himpunan pasangan terurut $\{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4)\}$

a. Sebutkan daerah asal dan daerah hasil dari relasi itu.

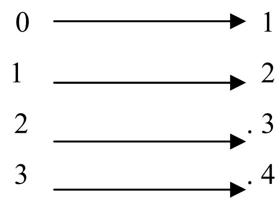
b. Gambar diagram panahnya.

Jawab:

a. Daerah asal = $\{0, 1, 2, 3\}$

Daerah hasil = $\{1, 2, 3, 4\}$

β.



Contoh 2:

Diketahui himpunan

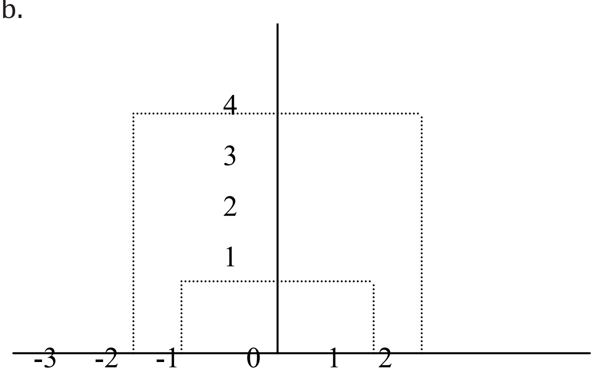
A = { -2, -1, 0, 1, 2 }

B = { 0, 1, 4, 8 }

a. Tulislah relasi sebagai pasangan berurutan yang menunjukkan "kuadrat dari", dari himpunan A ke himpunan B.
b. Gambar grafiknya.

Jawab:

a. {(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)}
b.



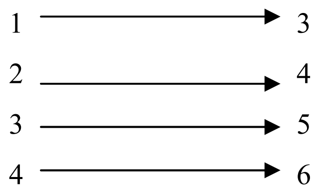
Contoh 3

Diketahui himpunan pasangan terurut {(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)}

a. Sebutkan daerah asal dan daerah hasilnya.
b. Gambar diagram panahnya.
c. Sebutkan aturan relasinya.
d. Gambar grafiknya

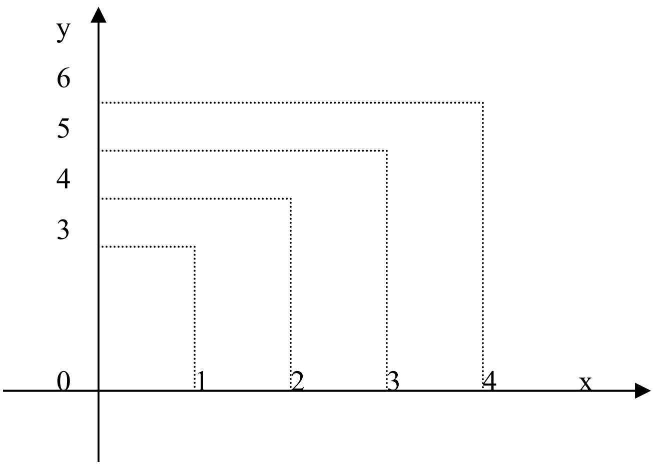
Jawab:

a. Daerah asal = {1, 2, 3, 4 }
   Daerah hasil = { 3, 4, 5, 6 }
b.



c. Aturan relasinya “ ditambah dua “

d.



Sekali lagi diingatkan bahwa relasi dari dua himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari A x B atau

A R B $\subseteq$ A X B.

Sifat-sifat Relasi

1) Refleksif

Suatu relasi R pada himpunan A adalah reflektif jika dan hanya jika (a, a) $\in$ R Untuk setiap a $\in$ A atau relasi terhadap dirinya sendiri.

Contoh

Relasi “sejenis kelamin dengan” pada himpunan manusia adalah relasi refleksif, karena setiap orang sejenis kelamin dengan dirinya sendiri. Contoh lain adalah relasi “sama dengan” pada himpunan bilangan, karena setiap bilangan sama dengan bilangan itu sendiri. Sedangkan relasi “ayah dari” pada himpunan manusia bukan relasi refleksif, karena seseorang itu bukan ayah dari dirinya sendiri.

2) Simetris

Suatu relasi R pada himpunan A adalah simetris jika dan hanya jika (a, b) $\in$ R, maka (b, a) $\in$ R untuk setiap a, b $\in$ A.

Contoh :

Relasi "saudara dari" adalah relasi simetris pada himpunan manusia, karena jika Ali saudara dari Siti tentulah siti saudara dari Ali. Begitu juga relasi "tegak lurus pada" pada himpunan dalam geometri adalah relasi simetris, karena jika l tegaklurus pada k tentu k tegaklurus pada l. Sedangkan relasi "ayah dari"bukan relasi simetris, karena jika Dudi ayah dari Dea tentu Dea bukan ayah dari Dudi. Pada himpunan relasi "kurang dari" bukan relasi simetris, sebab 2 kurang dari 3 tetapi 3 tidak kurang dari 2.

3) Transitif

Suatu relasi R pada himpunan A adalah transitif jika dan hanya jika (a, b) $\in$ R, dan (b, c) $\in$ R maka (a, c) $\in$ R untuk setiap a, b, c $\in$ A.

Contoh :

Relasi "saudara kandung dari " pada himpunan manusia adalah relasi transitif, sebab jika Ali saudara kandung dari Siti dan Siti saudara kandung dari Tuti, tentu Ali saudara kandung dari Tuti. Dalam himpunan bilangan relasi "sama dengan" (=) adalah transitif, sebab jika a = b dan b = c, maka a = c. Sedangkan relasi "ayah dari" dan "dua kali dari" bukan relasi transitif.

4) Ekivalen

Suatu relasi R pada himpunan A adalah ekivalen jika dan hanya jika relasi itu refleksif, simetris, dan transitif.

Relasi "sama dengan", "kongruen dengan", "sebangun dengan" adalah relasi ekivalen, karena refleksif, simetris, dan transitif.

Contoh

Tentukan apakah relasi

R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)}

Pada A = { 1, 2, 3 }.

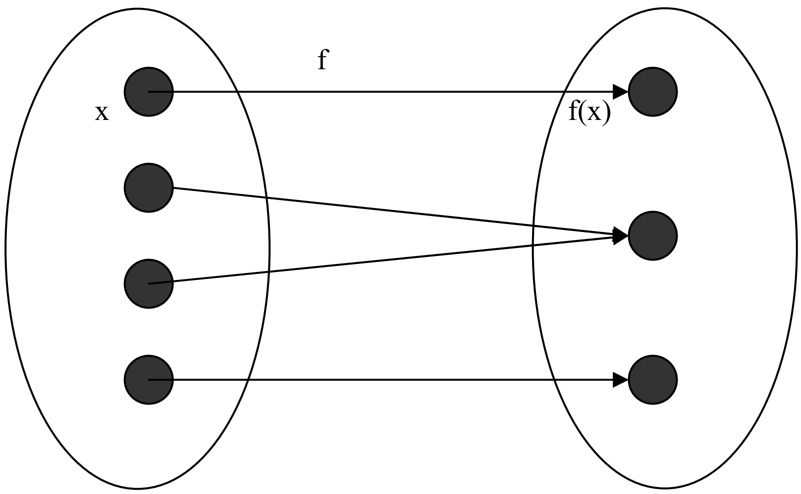
Jawab :

- Relasi R ini adalah refleksif, sebab (1, 1), (2, 2), (3, 3) adalah anggota dari relasi tersebut.
- Relasi R ini adalah simetris, sebab (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2) yaitu untuk setiap (a, b) $\in$ R mengakibatkan (b, a) $\in$ R.
- Relasi R ini adalah transitif, sebab untuk setiap (a, b) dan (b, c) $\in$ R, mengakibatkan (a, c) $\in$R. (silahkan periksa!)

Jadi, relasi ini adalah relasi ekivalen.

Pengertian Fungsi

Untuk memperoleh gambaran tentang fungsi, kita dapat membayangkan sebuah senapan yang diisi dengan beberapa peluru dan menembakkannya ke obyekobyek sasarannya. Fungsi dapat diibaratkan sebagai suatu senapan. Fungsi ini memperoleh peluru dari suatu himpunan yang dikatakan sebagai daerah asal (domain) dan menembakkannya pada suatu himpunan sasaran (kodomain). Setiap peluru yang keluar dari senapan itu mengenai tepat satu titik sasaran, dapat pula beberapa peluru mengenai tepat titik sasaran yang sama. Himpunan titik sasaran yang terkenai itu dinamakan daerah hasil (range). Kita dapat menggambarkan fungsi sebagai berikut:



Dari ilustrasi tersebut kita melihat fungsi sebagai suatu aturan yang mengkaitkan suatu anggota himpunan ke anggota himpunan lain. Fungsi juga dapat dipandang sebagai pasangan terurut dengan sifat tertentu.

Definisi Fungsi,

Suatu fungsi f adalah suatu aturan yang mengaitkan setiap elemen x dalam suatu himpunan, yang disebut daerah asal, domain, atau daerah definisi, ke sebuah nilai tunggal f(x) dari himpunan ke dua, yang disebut dengan kodomain. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (range).

Untuk suatu fungsi yang daerah asalnya tidak dirinci, kita menganggap bahwa daerah asalnya adalah himpunan bilangan real.

Jadi untuk suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B diperlukan :

a. Suatu himpunan A disebut daerah asal (daerah definisi / domain) fungsi itu.
b. Suatu himpunan B disebut daerah kawan (kodomain).
c. Suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B yang memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B

Suatu fungsi biasa diberi nama atau notasi dengan huruf f, g, atau F. f(x) atau f: x, dibaca "f dari x" atau "f pada x", menunjukkan nilai yang diberikan f kepada x. Notasi untuk daerah asal fungsi f dinyatakan dengan Df dan daerah hasil fungsi f dinyatakan dengan Rf.

Jika diketahui $y = f(x) = x + 4$, maka kita peroleh $f(2) = 2 + 4 = 6$, $f(0) = 0 + 4 = 4$, $f(-1) = -1 + 4 = 3$.

Untuk fungsi tersebut, $y = f(x) = x + 4$,, daerah asalnya adalah himpunan bilangan real dan daerah hasilnya juga himpunan bilangan real. Daerah asal dan daerah hasil ini dituliskan dengan notasi berturut-turut sebagai berikut:

$Df = \{x \mid x \varepsilon R\}$ dan

$Rf = \{y \mid y \varepsilon R\}$

Contoh.3
Diketahui $f(x) = x^2 - 3$
Tentukan:

a. f(4)
b. f(0)
c. f(-4)

J
awab.

a. $f(4) = 4^2 - 3 = 16 - 3 = 13$
b. $f(0) = 0^2 - 3 = 0 - 3 = -3$
c. $f(-4) = (-4)^2 - 3 = 16 - 3 = 13$

Contoh 4

Misalkan fungsi g didefinisikan dengan rumus $g(x) = x^2 + 1$

a. Tentukan g(2), g(-1), g(4), dan g(-3)

b. Jika diketahui g(a) = 50, tentukanlah persamaan dalam a dan selesaikanlah.

Jawab :

a. $g(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

$g(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$g(4) = 4^2 + 1 = 17$

$g(-3) = (-3)^2 + 1 = 10$

b. $g(a) = a^2 + 1 = 50$

$a^2 + 1 = 50$

Persamaan dalam a adalah,

$a^2 – 49 = 0$

Penyelesaian persamaan ini adalah,

$(a + 7)(a – 7) = 0$

$(a + 7) = 0$ atau $(a – 7) = 0$

Jadi, a = -7 atau a = 7

Suatu fungsi dapat dipandang sebagai himpunan pasangan terurut yang bersifat tak ada dua pasangan yang mempunyai unsur pertama yang sama. Himpunan unsur pertama disebut domain dan himpunan unsur kedua disebut himpunan range. Himpunan yang memuat himpunan bayangan disebut kodomain. Bila A dan B himpunan, pemetaan dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi yang memasangkan setiap anggota dari A dengan tepat satu anggota dari B.

Contoh 5

Misalkan himpunan pasangan terurut (x, y) dengan x unsur dari domain {2, 3, 4} dan y unsur dari kodomain {3, 4, 5, 6}, sedemikian sehingga:

(1) A = {(2, 3), (3, 4), (4, 5)}

(2) B = {(2, 3), (3, 4)}

(3) C = {(2, 3), (3, 4), (4, 5), (2, 6)}

(4) D = {(2, 5), (3, 5), (4, 5)}

Tentukan yang mana dari himpunan-himpunan pasangan terurut itu yang merupakan fungsi?

Jawab.

(1) A adalah fungsi karena setiap elemen pada daerah asal (domain), yaitu 2, 3, dan 4 mengaitkan tepat satu elemen yang ada pada daerah kawan (kodomain), yaitu 3, 4, dan 5.

(2) B adalah bukan fungsi karena ada elemen pada daerah asal (domain), yaitu 4, tidak dikaitkan dengan elemen pada daerah kawan (kodomain).

(3) C adalah bukan fungsi karena ada elemen pada daerah asal (domain), yaitu 2, dikaitkan tidak tepat satu elemen pada daerah kawan (kodomain), yaitu 3 dan 6.

(4) D adalah fungsi karena setiap elemen pada daerah asal (domain), yaitu 2, 3, dan 4 mengaitkan tepat satu elemen pada daerah kawan (kodomain), yaitu 5.

Coontoh 6

Carilah daerah asal (domain) fungsi-fungsi berikut:

a. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

b. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

Jawab.

a. Variabel x dapat disubstitusi dengan sebarang bilangan kecuali 3.

Substitusi x oleh 3 akan mengakibatkan $f(x) = \dfrac{1}{3-3} = \dfrac{1}{0}$ tidak terdefinisi. Dengan demikian,

daerah asal f adalah $\{ x \in R, x \neq 3 \}$

b. Kita harus membatasi x sehingga dijamin $9 - x^2 \geq 0$ dengan tujuan menghindari

bilangan tak real untuk $f(x) = \sqrt{9-x^2}$.

$9 - x^2 \geq 0$ ekuivalen dengan

(3 – x)(3 + x) ≥ 0 ekuivalen dengan

$-3 \leq x \leq 3$

Dengan demikian,

daerah asal fungsi f adalah $\{ -3 \leq x \leq 3 , x \in R \}$

Operasi Pada Fungsi

Dalam bilangan, misalkan kita mempunyai dua buah bilangan a dan b. Jika kita

menambahkan bilangan itu, maka kita mempunyai sebuah bilangan baru a + b. Meskipun fungsi bukan merupakan bilangan, tetapi fungsi mempunyai beberapa sifat seperti bilangan. Misalkan kita mempunyai dua buah fungsi f dan g. Kita dapat menambahkan kedua fungsi itu untuk menghasilkan sebuah fungsi baru, yaitu f + g.

Perhatikan fungsi f dan fungsi g dengan aturan masing-masing sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{x-3}{2} \text{ dan } g(x) = \sqrt{x}$$

Df = {x | x ε R} dan Rf = {y | y ε R}

Dg = {x | x ≥ 0}dan Rf = {y | y ≥ 0}

Dari fungsi f dan g tersebut, kita dapat membuat sebuah fungsi baru F = f + g, yaitu

$$F(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-3}{2} + \sqrt{x}$$ dengan DF = {x | x ≥ 0}

Kita harus hati-hati dalam menentukan daerah asal pada fungsi baru itu, karena daerah asal pada fungsi baru (daerah asal F) itu merupakan irisan antara daerah asal f dan daerah asal g.

Dengan cara yang serupa, kita dapat melakukan operasi pengurangan, perkalian, dan pembagian dua buah fungsi f dan g.

Contoh 5

Diketahui dua buah fungsi f dan g dengan aturan:

f(x) = $\frac{x}{x-1}$ dan g(x) = $\sqrt{x^2-1}$

Tentukan:

a. Df
b. Dg
c. Rf
d. Rg
e. (f + g)(x)
f. D(f + g)
g. (f – g)(x)
h. D(f – g)

i. $(f \cdot g)(x)$

j. $D(f \cdot g)$

k. $(\frac{f}{g})(x)$

l. $D(\frac{f}{g})$

Jawab.

a. $Df = \{x \mid x \in R, x \neq 1\}$

b. $Dg = \{x \mid x \in R, x \geq 1 \cup x \leq -1\}$

c. $Rf = \{y \mid y \in R, y \neq 1\}$

d. $Rg = \{y \mid y \geq 0\}$

e. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x}{x-1} + \sqrt{x^2 - 1}$

f. $D(f + g) = \{x \mid x \in R, x < -1 \cup x > 1\}$

g. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x}{x-1} - \sqrt{1 + x^2}$

h. $D(f - g) = \{x \mid x \in R, x \neq 1\}$

i. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (\frac{x}{x-1}) \cdot (\sqrt{x^2 - 1})$

j. $D(f \cdot g) = \{x \mid x \in R, x < -1 \cup x > 1\}$

k. $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$

l. $D(\frac{f}{g}) = \{x \mid x \in R, x < -1 \cup x > 1\}$

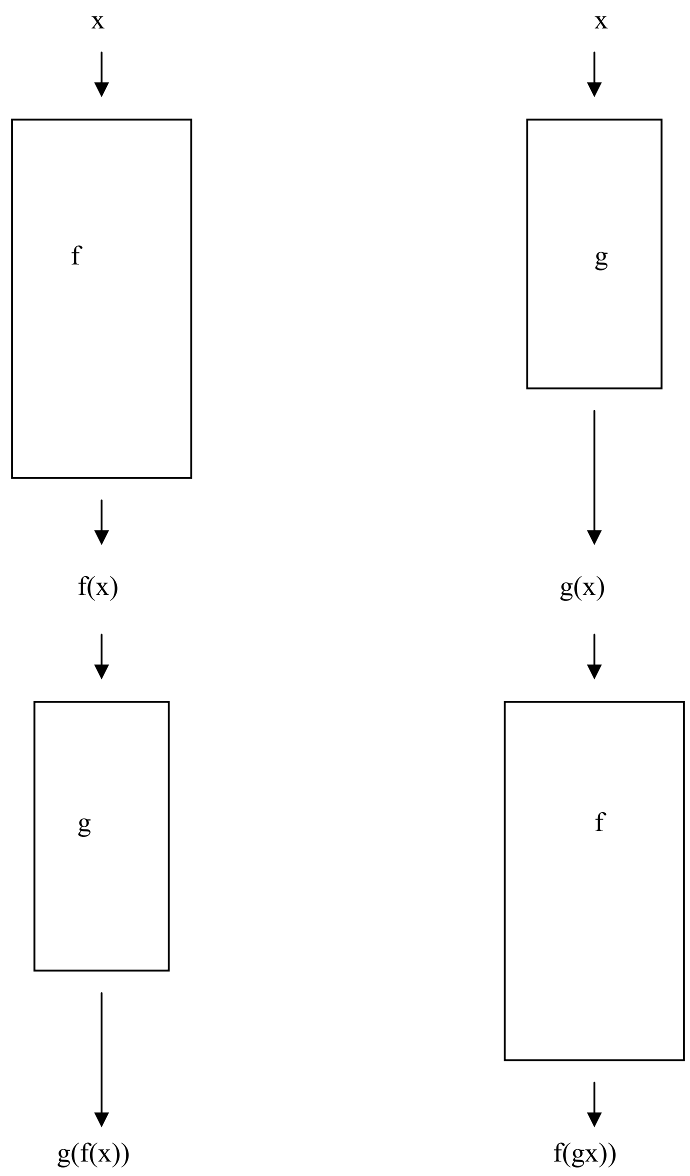
Komposisi Fungsi

Jika sebelumnya kita telah mengibaratkan fungsi f sebagai senapan yang bekerja untuk x dan menghasilkan f(x), pada pembahasan komposisi fungsi f dan g ini kita akan mengibaratkannya sebagai dua buah mesin yang bekerja berurutan. Fungsi f bekerja untuk x menghasilkan f(x), dan dilanjutkan fungsi g bekerja untuk f(x) menghasilkan g(f(x)). Fungsi yang dihasilkan ini merupakan komposit g dengan f, sering disebut dengan nama fungsi komposisi dan dinyatakan oleh g o f.

Jadi,

(g o f)(x) = g(f(x)).

Perhatikan fungsi komposisi g o f dan f o g merupakan dua fungsi yang berbeda. Fungsi-fungsi ini dapat diilustrasikan dengan gamnbar sebagai berikut:



Perhatikan kembali fungsi f dan g yang pernah kita bahas, yaitu

f(x) = $\frac{x}{x-1}$ dan g(x) = $\sqrt{x^2 - 1}$

Kita akan menyusun dua fungsi baru yang merupakan komposisi fungsi antara fungsi f dan fungsi g.

$$(g \circ f)(x) = (g(f(x))$$

$$= g\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 1}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1} - 1}$$

Untuk menentukan D(f o g) dan D(g o f), kita perhatikan dua fungsi f dan g yang lebih sederhana, yatitu

$$f(x) = \frac{x-3}{2} \text{ dan } g(x) = \sqrt{x}$$

Fungsi baru g o f dan f o g adalah sebagai berikut:

$$(g \circ f)(x) = (g(f(x))$$

$$= g\left(\frac{x-3}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{x-3}{2}}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f\left(\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 3}{2}$$

Jika kita perhatikan hasil kedua komposisi fungsi di atas, diperoleh daerah asal kedua komposisi fungsi tersebut, yaitu

D(g o f) = {x | x ε R, x $\geq$ 3}

D(f o g) = {x | x ε R, x $\geq$ 0}

Contoh 5

Diketahui $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 9}$ dan $g(x) = \sqrt{3x}$

Tentukan:

a. (f o g)(12)

b. (f o g)(x)

c. D(f o g)

Jawab.

a. (f o g)(12) = f(g(12)) = f($\sqrt{36}$) = f(6) = $\frac{6x6}{6^2 - 9} = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$

b. (f o g)(x) = f(g(x))

$$= f(\sqrt{3x})$$

$$= \frac{6\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x})^2 - 9}$$

$$= \frac{6\sqrt{3x}}{3x - 9}$$

$$= \frac{2\sqrt{3x}}{x - 3}$$

c. D(f o g) = {x | x ε R, x $\geq$ 0, x $\neq$ 3}

Latihan 1

1. Diketahui relasi “Faktor dari” dari himpunan A = { 1, 2, 3, 4 } ke himpunan B = {2, 4, 6, 8}. Nyatakanlah relasi tersebut dengan :
   a. Diagram panah

b. Himpunan pasangan berurutan
c. Grafik

2. Diketahui relasi {(1,0), (2,0), (2,1), (3,1), (4,2)}
   a. Tentukan daerah asal dan daerah hasilnya.
   b. Gambar diagram panahnya.
   c. Gambar grafiknya.

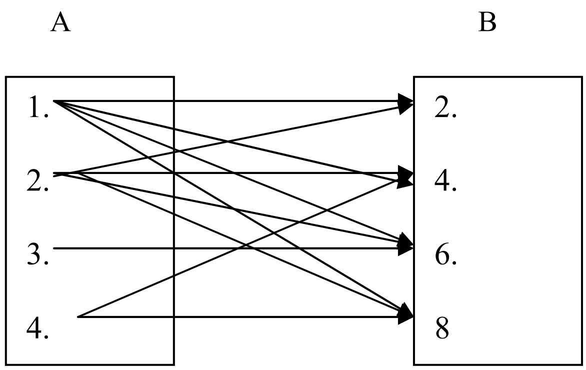
3. Fungsi f didefinisikan dengan rumus f(x) = 2x – 1
   a. Hitunglah f(3), f(-2), f(5), dan f(-4)
   b. Diketahui f(a) = 50, tentukanlah persamaan dalam a dan selesaikanlah.

4. Diketaui f : x → ax + b, f(0) = -3, f(2) = 1
   Tentukanlah a dan b kemudian hitunglah f(4).

5. Diketahui f(x) = $\sqrt{x+4}$ dan g(x) = x^2
   Tentukan:
   a. (f o g)(3)
   b. (f o g)(x)
   c. D(f o g)

Petunjuk Jawaban Latihan 1

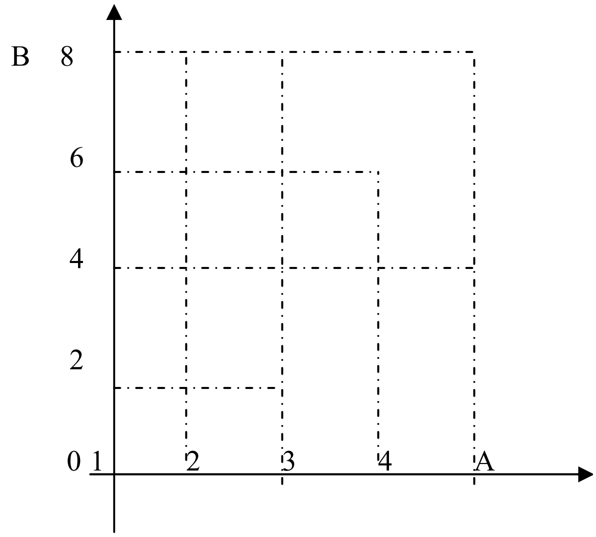
1. a. Perhatikan lagi contoh yang sudah diberikan, sehingga akan diperoleh diagaram seperti berikut. Ini.



   b. Ingat bahwa dalam menuliskan keanggotaan himpunan, unsur yang sama harus ditulis hanya stu kali. Misalnya {(1,2), (1, 2)} harus ditulis {(1,2)}. Anda akan memperoleh hasil sebagai berikut:

{(1,2), (1,4), (1,6), (1,8), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,6), (4,4), (4,8)}

c. Perhatikan lagi contoh yang sudah diberikan, sehingga akan diperoleh diagaram seperti berikut. Ini.

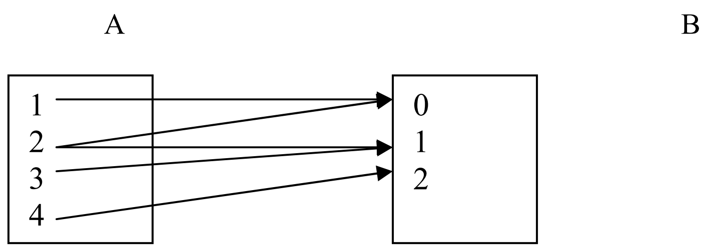


2. a. Ingat pengertian daerah asal dan daerah hasil, shingga anda akan memperoleh

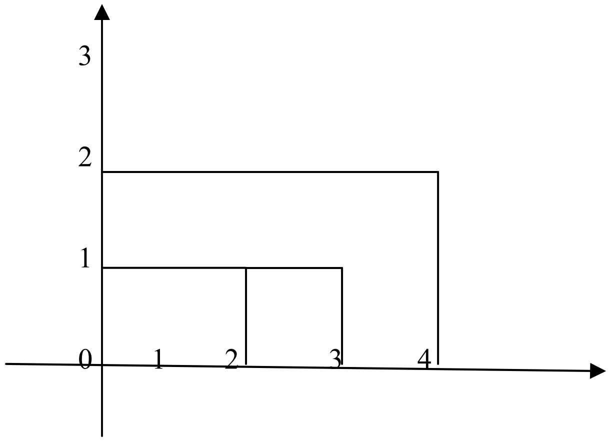
Daerah asal : {1, 2, 3, 4 }

Daerah hasil : {0, 1, 2 }

b. Perhatikan cara membuat diagram panah, sehingga anda memperoleh diagram panah sebagai berikut:



c. Perhatikan cara membuat grafik, sehingga anda memperoleh grafik sebagai berikut:



3. a. Substitusikan bilangan-bilangan itu ke dalam fungsinya, sehingga anda memperoleh:
   f (3) = 5
   f (-2) = - 5
   f (5) = 9
   f (-4) = -9
   b. Substitusikan "a" ke fungsinya sehingga anda memperoleh:
      f (a) = 2 a – 1
      50 = 2 a – 1
      50 + 1 = 2 a
      a = 25,5

4. Tulis dulu f : x → ax + b ke dalam bentuk f (x) = ax + b
   Kemuduan substitusikan bilangan-bilangan itu ke fungís yang ditulis dalam

   bentuk baru itu, sehingga anda memperoleh:

   f (0) = a . 0 + b = - 3
   b = - 3
   f (2) = a . 2 + b = 1
   2 a + b = 1
   2 a + (- 3) = 1
   2 a = 4
   a = 2
   Jadi, f(x) = 2x - 3
   f (4) = 2 . 4 – 3
   = 5

5. a. Ubahlah dulu bentuk (f o g)(3) menjadi bentuk f(g(3))
Karena g(3) = 9, anda akan memperoleh f(g(3)) = f(9) = $\sqrt{13}$

b. Ubahlah dulu bentuk (f o g)(x) menjadi bentuk f(g(x)

Karena g(x) = x^2, anda akan memperoleh f(g(x)) = $\sqrt{x^2+4}$

c. Dengan memperhatikan f(g(x)) = $\sqrt{x^2+4}$, anda akan memperoleh daerah asal

fog, yaitu D(fog) = {x | x ε R}

Rangkuman

1. Suatu relasi dapat dinyatakan dengan beberapa cara, yaitu:
   a. Dengan kata-kata.
   b. Dengan diagram panah.
   c. Dengan himpunan pasangan berurutan.
   d. Dengan grafik.
2. Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah himpunan pasangan berurutan yang merupakan himpunan bagian dari A x B (dibaca A kross B).
3. Daerah asal (domain) dari suatu relasi adalah himpunan yang anggotanya terdiri dari unsur-unsur pertama dari pasangan berurutan itu, sedangkan daerah hasil dari suatu relasi adalah himpunan yang anggotanya terdiri dari unsur-unsur kedua dari pasangan berurutan itu.
4. Suatu fungsi f adalah suatu aturan yang mengaitkan setiap elemen x dalam suatu himpunan, yang disebut daerah asal, domain, atau daerah definisi, ke sebuah nilai tunggal f(x) dari himpunan ke dua, yang disebut dengan kodomain. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (range).

5. Jika diketahui dua fungsi f dan g, maka

a. (f + g)(x) = f(x) + g(x)

b. (f – g)(x) = f(x) – g(x)

c. (f . g)(x) = f(x) . g(x)

d. $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

e. (f o g)(x) = f(g(x))

TES FORMATIF 1

Petunjuk: Pilihlah salah satu jawaban yang dianggap paling tepat !

1. Grafik dari relasi “kurang dari” dari himpunan A = {2, 3} ke himpunan B = {0, 1, 2, 3, 4} adalah ...
   a. {(0, 1), (2, 3), (3, 4)}
   b. {(0, 1), (2, 3)}
   c. {(2, 3)}
   d. {(0, 1), (2, 3), (2, 4)}

2. Jika f : R → R, $f(x) = x^2 + 2x + 5$, maka f(5) ...
   a. 185
   b. 95
   c. 95
   d. 40

3. Jika f : R → R, $f(x) = x^2 + 6x + 5$ dan f(a) = 12, maka a adalah ...
   a. 5 atau –7
   b.. 1 atau 6
   c.. 0 atau 6
   d. 1 atau -7

4. Diketahui f : R → R, f(x) = ax + b
   Jika f(3) = 10, dan f(5) = 28, maka rumus untuk f adalah ...
   a. f(x) = 3x + 1
   b. f(x) = 7x –11
   c. f(x) = 5x + 3
   d. f(x) = 9x – 17

5. Diketahui. himpunan pasangan terurut {(0,1), (1,2), (2,3), (3,4)}
   Daerah asal himpunan itu adalah
   a. {0, 1, 2, 3 }
   b. {1, 2, 3, 4 }
   c. {0, 1, 2, 3, 4 }
   d. {0,4 }

6. Diketahui himpunan
   A = { -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}

   B = { 0, 1, 2 }

Relasi sebagai pasangan berurutan yang menunjukkan “kuadrat dari”, dari himpunan B ke himpunan A adalah

a. $\{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$
b. $\{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$
c. $\{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0)\}$
d. $\{(0, 0), (1, 1), (4, 2)\}$

7. Diketahui himpunan pasangan terurut $\{(1, 1), (2, 8), (3, 27), (4, 64)\}$.
   Aturan relasinya adalah
   a. Akar pangkat tiga dari
   b. Kurang dari
   c. Lebih dari
   d. Pangkat tiga dari.

8. Relasi “suami dari “ pada himpunan manusia adalah relasi
   a. Transitif
   b. Reflektif
   c. Simetris
   d. a, b, c salah

9. Diktahui beberapa relasi berikut:
   (1) $y = \sqrt{x}$
   (2) $y + x = 5$
   (3) $y^2 = 1 - x^2$
   (4) $1 = x - y$
   Dari keempat relasi tersebut, yang bukan fungsi dari x ke y adalah
   a. (1)
   b. (2)
   c. (3)
   d. (4)

10. Diketahui beberapa relasi berikut:
   (1) $xy = 1$
   (2) $x^2 + y^2 = 9$
   (3) $x = 5$
   (4) $x = y^2 - 9$

Dari keempat relasi tersebut, yang merupakan fungsi dari x ke y adalah

a. (1)
b. (2)
c. (3)
d. (4)

Balikan dan Tindak Lanjut

Cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban Anda yang benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 % - 100 % = baik sekali

80 % - 89 % = baik

70 % - 79 % = cukup

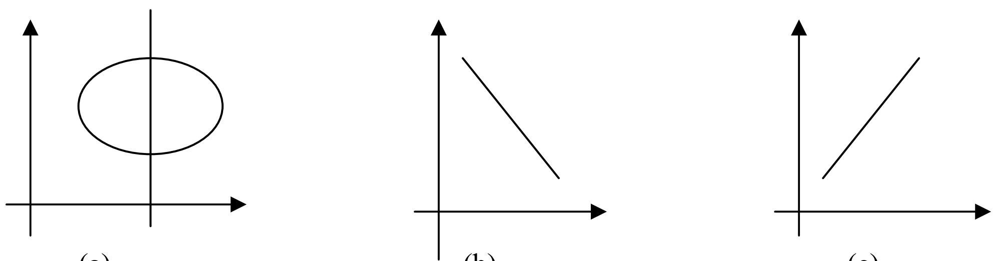
< 70 % = kurang

Kalau tingkat penguasaan Anda di atas 80 %, bagus!, tetapi bila tingkat penguasaan anda masih di bawah 80 %, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

Grafik Fungsi Linear

Dalam grafik suatu fungsi sumbu horizontal menyatakan domain dan sumbu vertical menyatakan kodomain. Persyaratan bahwa setiap anggota domain berpasangan dengan tepat satu unsur pada kodomain dapat dilihat dari jika garis vertikal yang memotong grafik. Jika setiap garis vertikal memotong tepat di satu titik pada grafik, maka grafik itu merupakan grafik fungsi. Sebaliknya, jika ternyata ada garis vertikal yang memotong grafik di dua atau lebih titik, maka grafik itu bukan merupakan grafik suatu fungsi.

Perhatikan gambar berikut, (a) merupakan bukan grafik fungsi, sedang (b), dan (c) merupakan bukan grafik suatu fungsi.



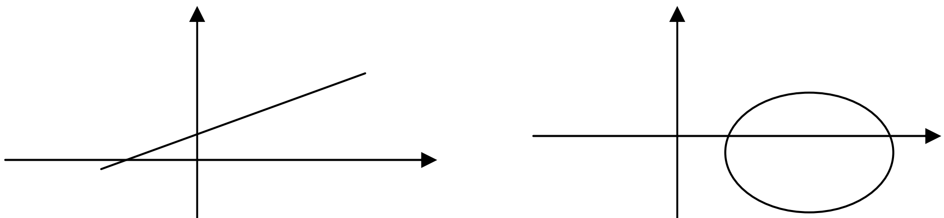
(a) (b) (c)

Tes Garis Vertikal :

Jika tak ada garis vertikal yang memotong grafik suatu persamaan pada lebih dari satu titik, maka persamaan itu menyatakan suatu fungsi. Jika ada garis vertikal memotong grafik suatu persamaan pada dua atau lebih titik, maka persamaan tersebut tidak menyatakan suatu fungsi.

Contoh :

Mana dari grafik tersebut yang menyatakan suatu fungsi ?



(a) (b)

Garis lurus pada gb. (a) menyatakan grafik suatu fungsi, sedangkan lingkaran pada Gb. (b) tidak menyatakan grafik suatu fungsi. Mengapa ?

Fungsi dapat juga dinyatakan dengan y = f(x) (dibaca y fungsi dari x atau y nilai fungsi x). Misalkan kita mempunyai suatu fungsi $y = f(x) = x + 5$. Jika x = 1 kita ganti x dengan 1 sehingga kita peroleh $y = f(1) = 1 + 5 = 6$. $f(2) = 2 + 5 = 7$. Untuk $y = h(x) = x^2 + 2x + 3$, $h(2) = 2^2 + 2(2) + 3 = 11$.

Contoh :

Diketahui $f(t) = 2 + 3t + 3t^2$, tentukan f (0) dan f(-3)

Jawab :

$f(0) = 2 + 3(0) + 3(0)^2 = 2$

$f(-3) = 2 + 3(-3) + 3(-3)^2 = 2 - 9 + 27 = 20$

Menggambar Grafik Suatu Fungsi

Untuk menggambar grafik suatu fungsi terlebih dahulu dicari pasangan-pasangan terurut dari fungsi itu, kemudian menggambar pasangan itu sebagai titik pada suatu system koordinat, lalu menghubungkan titik-titik tersebut. Pada bagian, ini grafik fungsi yang dibahas hanya terbatas pada **grafik fungsi linear**.

Contoh

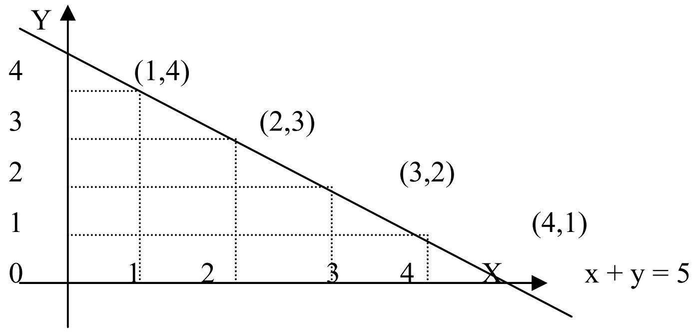
Tentukan beberapa pasangan terurut dari fungsi x + y = 5

Jawab:

Kita pilih beberapa harga x,

x = 1, maka y = 5 – x = 5 – 1 = 4 dan diperoleh titik (1,4).
x = 2, maka y = 5 – x = 5 – 2 = 3 dan diperoleh titik (2,3)
x = 3, maka y = 5 – x = 5 – 3 = 2 dan diperoleh tititk (3,2)
x = 4, maka y = 5 -. x = 5 – 4 = 1 dan diperoleh titik (4,1)

Untuk menggambar grafik fungsi x + y = 5, kita dapat membuat garis melalui titik-titik itu. Sehingga diperoleg grafik sebagai berikut:



Titik Potong dengan Sumbu Koordinat

Jika grafik suatu fungsi memotong sumbu y pada suatu titik, maka titik tersebut disebut titik potong grafik fungsi dengan sumbu y. Titik ini mempunyai koordinat pertama sama dengan 0 (x = 0). Sebab semua titik pada sumbu y mempunyai koordinat pertama sama dengan 0. Oleh karena itu jika kita hendak mencari titik potong grafik suatu fungsi dengan sumbu y kita cari titik yang koordinat pertamanya 0 (pasangan yang unsur pertamanya 0). Jika grafik suatu fungsi memotong sumbu x pada suatu titik, makatitik tersebut disebut titik potong grafik fungsi dengan sumbu x. Titik ini memiliki koordinat kedua sama dengan 0.

Contoh 1

Tentukan titik potong grafik fungsi 3x + 2y = 4 dengan sumbu x dan sumbu y kemudian gambarlah grafik fungsi itu.

Jawab :

Titik potong dengan sumbu x mempunyai koordinat kedua y = 0.

Substitusikan y dengan 0 pada aturan fungsi.

$3x + 2(0) = 4$

$3x = 4$

$x = 4/3$

Jadi (4/3, 0) adalah titik potong grafik fungsi dengan sumbu x.

Titik potong dengan sumbu y mempunyai koordinat pertama x = 0.

Substitusi x dengan 0 pada aturan fungsi.

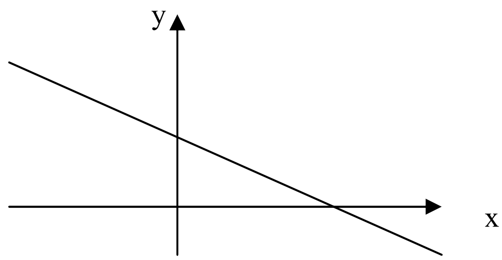
$3(0) + 2y = 4$

$2y = 4$

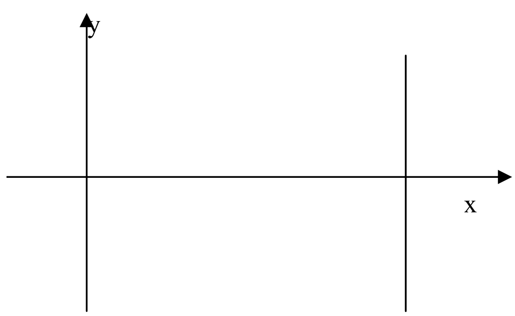
y = 2
Jadi (0,2) adalah titik potong grafik fungsi dengan sumbu y.

Dengan menggunakan kedua titik tersebut kita dapat menggambar grafik fungsi tersebut, dengan cara:

1. Tetapkan titik-titik yang sudah ditemukan itu pada bidang koordinat.
2. Tarik garis lurus melalui kedua titik itu. Hasilnya seperti tampak pada gambar gambar di bawah ini.



Contoh 2
Gambar grafik relasi yang mempunyai aturan x = 5
Jawab :
Setiap titik pada relasi ini mempunyai koordinat pertama 5.
Jadi garisnya tidak mempunyai titik potong dengan sumbu y.
Titik potong dengan sumbu x adalah (0,5).
Untuk menggambar grafiknya kita tentukan satu titik lagi misalnya (2,5).
Tarik garis lurus melalui titik (0,5) dan (2,5).
Garis ini sejajar dengan sumbu y.



Kemiringan dan Fungsi Linier

Perhatikan gambar di bawah ini: Titik A(2,3), B(4,5), C(5,6) dan D(6,7) terletak pada grafik fungsi dengan aturan x – y = -1. Ambil sepasang titik A dan B dari grafik. Hasil bagi

antara koordinat kedua B dikurang koordinat kedua A dan koordinat pertama B dikurangi koordinat pertama A, adalah (5-3)/(4-2) = 1. Untuk pasangan A dan C diperoleh hasil bagi (-2)/(-2) = 1. Ternyata untuk setiap pasang titik pada grafik tersebut hasil bagi itu sama. Sehingga hasil bagi antara koordinat kedua titik kedua dikurangi koordinat kedua titik pertama dan koordinat pertama titik kedua dikurangi koordinat pertama titik pertama untuk setiap pasang titik pada suatu garis lurus dapat dijadikan ukuran kemiringan garis tersebut.

Definisi kemiringan suatu garis.

Misalkan terdapat suatu garis lurus yang melalui titik A(x_1,y_1) dan B(x_2,y_2).
Kemiringan garis itu adalah m dan didefinisikan :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$$

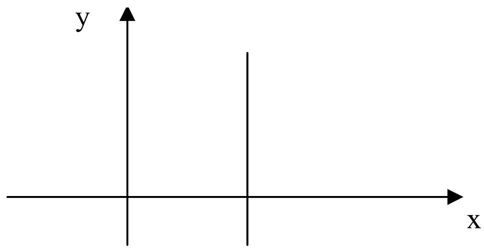
Dari definisi kemiringan di atas dapat dilihat bahwa kemiringan m mungkin positif, nol dan negatif, m positif apabila $x_2 - x_1$ positif $y_2 - y_1$ juga positif. Hal ini berarti bahwa di sebelah kanan suatu titik A akan juga berada lebih atas dari A. Jadi jika m positif garis akan naikdari kiri ke kanan. m = 0 apabila $y_2 - y_1 = 0$, Y tetap. Hal ini berarti bahwa garis itu sejajar dengan sumbu x. Dan m negatif apabila $x_2 - x_1$ positif $y_2 - y_1$ negatif. Hal ini berarti bahwa titik di sebelah kanan suatu titik A akan berada lebih dari A. Jadi garis turun dari kiri ke kanan. Jika x tetap ($x_1 = x_2$)maka

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{0}$$

m tidak terdefinisi. Dengan demikian, suatu garis sejajar dengan sumbu y, m-nya tidak terdefinisi.

Situasi ini dapat disajikan melalui gambar berikut:.



Contoh:

Tentukan kemiringan garis yang melalui titik (3,5) dan (2,1)

Jawab:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{1-5}{2-3}$$

$$= 4$$

Sekarang perhatikan suatu garis lurus yang mempunyai persamaan y = ax + b.

Akan ditentukan kemiringan (m). Untuk itu ambil dua titik pada garis itu, yaitu titik A dengan koordinat pertama x_1 dan B dengan koordinat pertama x_2, maka:

$y_1 = ax_1 + b$ dan

$y_2 = ax_2 + b$ sehingga:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= a$$

Dengan demikian,
Suatu garis $y = ax + b$ mempunyai kemiringan a.

Garis Melalui Suatu Titik dengan Kemiringan Tertentu

Contoh
Misalkan terdapat sebuah garis dengan kemiringan 2 dan melalui titik (3,1). Tentukan persamaan garis itu.

Jawab :
Karena garis itu mempunyai kemiringan 2, maka persamaan garis itu berbentuk :
$y = 2x + b$.
Karena titik (3,1) terletak pada garis tersebut, maka :
$1 = 2(3) + b = 6 + b$
Jadi $b = 1 - 6 = -5$
Sehingga persamaan garis itu adalah $y = 2x - 5$

Sekarang akan dicari persamaan suatu garis dengan kemiringan m dan melalui titik (x_1,y_1) dengan cara seperti di atas.

Karena kemiringannya m, maka persamaan garis itu adalah: $y = mx + b$
Karena garis itu melalui (x_1,y_1), maka $y_1 = mx_1 + b$, sehingga :

$b = y_1 - mx_1$ dan
$y = mx + y_1 - mx_1$
$y - y_1 = m(x - x_1)$

Jadi, persamaan garis dengan kemiringan m dan melalui titik (x_1,y_1) adalah

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Contoh.
Diketahui sebuah garis melalui dua titik (2,3) dan (3,4).

Tentukan persamaan garis itu.
Jawab :
Misalkan garis itu mempunyai kemiringan m, sehingga mempunyai persamaan :

$y = mx + b$

Kemudian tentukan nilai m dan b.
Karena garis itu melalui (2,3) dan (3,4), maka :

$3 = m(2) + b$ dan $4 = m(3) + b$
$3 = 2m + b$ dan $4 = 3m + b$
$b = 3 - 2m$ dan $4 = 3m + b$

Dari kedua persamaan itu diperoleh,

$4 = 3m + b = 3m + 3 – 2m = m + 3$

$4 = m + 3$

$m = 1$

$b = 3 – 2m$

$= 3 – 2(1)$

$= 3 – 1$

$= 2$

Jadi persamaan garis itu adalah

$y = x + 1$

Persamaan Garis Melalui Dua Titik

Untuk mencari persamaan garis yang melalui dua titik (x_1,y_1) dan (x_2,y_2), dimulai dengan menganggap kemiringan garis itu m, sehingga garis itu mempunyai persamaan y = mx + b.

Karena garis itu melalui (x_1,y_1), dan (x_2,y_2), maka diperoleh :

$y_1 = mx1 + b$ dan $y_2 = mx_2 + b$

$b = - mx_1 + y_1$ dan $b = -mx_2 + b$

Jadi $-mx_1 + y_1 = -mx_2 + y_2$

$mx_2 – mx_1 = y_2 – y_1$

$m(x_2 – x_1) = y_2 - y_1$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Kita telah mengetahui bahwa garis yang melalui (x_1, y_1) dan kemiringan m mempunyai persamaan

$y – y_1 = m(x – x_1)$

Karena

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Jadi Persamaan garis melalui dua titik (x_1,y_1) dan (x_2,y_2) adalah

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ atau}$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},\ x_1 \neq x_2 \text{ dan } y_1 \neq y_2$$

Contoh

Tentukan persamaan garis yang melalui titik (1, -2) dan titik (5, 3).

Jawab.

Dengan menggunakan humus

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

dan diketahui bahwa $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $y_1 = -2$, dan $y_2 = 3$, kita peroles sebuah persamaan sebagai berikut:

$$\frac{y - (-2)}{3 - (-2)} = \frac{x - 1}{5 - 1}$$

Dengan sedikit menggunakan operasi hitung, kita akan memperoleh persamaan garis itu, yaitu

$4y = 5x - 13$

atau dapat ditulis

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{13}{4}$$

Latihan 2

1. Diketahui $f(x) = 2 + 3x^2$
   Tentukan f (0) dan f(-1)
2. Diketahui x + 2y = 5
   Tentukan 3 buah pasangan terurut dari fungsi itu!
3. Diketahui dua buah titik (1,5) dan (2, 4)
   Tentukan kemiringan garis yang melalui titik!
4. Diketahui sebuah titik (2, 3) dilalui sebuah garis dengan kemiringan ½ .
   Tentukan persamaan garis itu!..
5. Diketahui dua buah titik (2, 6) dan (3, 8).
   Tentukan persamaan garis yang melalui titik-titik itu!

Petunjuk Jawaban Latihan 2

1. Substitusikan 0 dan 1 ke dalam fungsinya, sehingga anda akan memperoleh
   f(0) = 2 dan
   f(-1) = 5
2. Ambil sembarang bilangan-bilangan untuk x, misalnya x = 1, x = 2, dan x = 3. Selanjutnya substitusikan ke persamaan x + 2y = 5
3. Ingat bahwa rumus kemiringan statu garis adalah

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

   Tetapkan mana x_1,y_1,x_2,dan y_2. Selanjutnya substitusikan bilangan-bilangan itu ke dalam persamaan kemiringan garis. Terakhir sederhanakan persamaan itu.
4. Ingat bahwa rumus persamaan garis jika diketahui satu titik dan kemiringan, yaitu $y - y_1 = m(x - x_1)$. Substitusikan titik dan kemiringan itu ke dalam persamaan tersebut, kemudian sederhanakan.
5. Ingat bahwa rumus persamaan garis jika diketahui satu titik dan kemiringan, yaitu

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

   Substitusikan titik dan kemiringan itu ke dalam persamaan tersebut, kemudian sederhanakan.

Rangkuman

1. Menggambar grafik suatu fungsi dapat dilakukan dengan terlebih dahulu mencari pasangan-pasangan terurut dari fungsi itu, dilanjutkan dengan menggambar pasangan itu sebagai titik pada suatu system koordinat, dan menghubungkan titik-titik tersebut.
2. Misalkan terdapat suatu garis lurus yang melalui titik A(x_1,y_1) dan B(x_2,y_2). Kemiringan garis itu adalah m dan didefinisikan :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$$

3. Persamaan garis dengan kemiringan m dan melalui titik (x_1,y_1) adalah
   $y - y_1 = m(x - x_1)$
4. Persamaan garis melalui dua titik (x_1,y_1) dan (x_2,y_2) adalah

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \ x_1 \neq x_2 \text{ dan } y_1 \neq y_2$$

Tes Formatif 2

1. Persamaan garis yang melalui dua titik (1,2) dan (3,5) adalah
   a. $y = \frac{2}{3} x$
   b. $y = \frac{2}{3} + 1$
   c. $y = 3x + 1$
   d. $2y - 3x = 1$

2. Persamaan garis yang melalui dua titik (0,3) dan (0,-5)adalah
   a. $x = 0$
   b. $y = 0$
   c. $y = -8x + 3$
   d. $y = 8x + 3$

3. Kemiringan grafik fungsi $y = 2x - 3$ adalah
   a . $\frac{2}{3}$
   b. $-\frac{2}{3}$
   c. $\frac{1}{2}$
   d. 2

4. Kemiringan grafik fungsi $2x - 3y = 5$ adalah
   a. 2
   b. $\frac{2}{3}$
   c. $-\frac{2}{3}$
   d. $\frac{3}{2}$

5. Persamaan garis yang melalui titik A (2,3) dan kemiringan 2 adalah
   a. $y - 2x + 1 = 0$
   b. $y = -2x + 1$
   c. $y = 2x + 1$

d. $y + 2x + 1 = 0$

6. Persamaan garis yang melalui titik B (-3,4) dan kemiringan 0 adalah
   a. $y = 3x$
   b. $4y = -3x$
   c. $x = -3$
   d. $y = 4$

7. Pernyataan berikut yang benar adalah
   a. Kemiringan sumbu y sama dengan nol
   b. Kemiringan sumbu x adalah nol
   c. Jika grafik mempunyai kemiringan negatif maka grafik naik ke kanan.
   d. Jika grafik mempunyai kemiringan positif maka grafik naik ke kiri

8. Suatu garis melalui titik (1,2). Garis itu memetong sumbu x di
   a. $x = 0$
   b. $x = 1$
   c. $y = 2$.
   d. $y = 0$

9. Jika suatu garis melalui (1, 2) dan (3, 2) maka garis itu
   a. Memotong sumbu x
   b. Melalui (0, 0)
   c. Kemiringannya tidak terdefinisi.
   d. Memotong sumbu y

10. Jika suatu garis melalui A (1, -1) dan B (-3, 3) maka garis itu.
    a. Sejajar sumbu x
    b. Sejajar sumbu y..
    c. Kemiringannya 0
    d. Melalui titik (0, 0)

Balikan dan Tindak Lanjut

Cocokanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban Anda yang benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar

Rumus:

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban Anda yang benar}}{10} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai:

90 % - 100 % = baik sekali

80 % - 89 % = baik

70 % - 79 % = cukup

< 70 % = kurang

Kalau tingkat penguasaan Anda di atas 80 %, bagus!, tetapi bila tingkat penguasaan anda masih di bawah 80 %, Anda harus mengulangi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum Anda kuasai.

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

Tes Formatif 1

1. c
2. d
3. d
4. d
5. a
6. a
7. d
8. d
9. c
10. a

Tes Formatif 2

1. d
2. a
3. d
4. b
5. a
6. d
7. b
8. d
9. d
10. d

GLOSARIUM

Bilangan kardinal : menunjukkan banyak elemen dalam suatu himpunan .

Ekuivalen : menunjukkan dua buah himpunan yang berkorespondensi satu-satu.

Gabungan dua himpunan : menunjukkan himpunan seluruh elemen dalam himpunan pertama atau dalam dalam himpunan kedua.

Himpunan : menunjukkan kumpulan dari obyek-obyek. Obyek-obyek secara individual dinamakan elemen, unsur, atau anggota dari himpunan itu.

Himpunan bagian : menunjukkan himpunan dimana setiap elemen pada himpunan pertama adalah elemen pada himpunan kedua.

Himpunan berhingga : menunjukkan banyak elemen dalam himpunan itu nol atau suatu bilangan asli.

Himpunan kosong : menunjukkan suatu himpunan yang tidak memuat elemen.

Himpunan semesta : menunjukkan himpunan yang memuat seluruh elemen yang menjadi perhatian kita.

Irisan dua himpunan menunjukkan himpunan semua elemen sekutu untuk himpunan pertama dan himpunan kedua.

Komplemen A relatif terhadap B : menunjukkan himpunan seluruh elemen pada B yang tidak terdapat pada A.

Komplemen himpunan : menunjukkan himpunan semua elemen di dalam himpunan semesta S tetapi tidak dalam F.

Korespondensi satu-satu : menunjukkan pasangan elemen pada suatu himpunan dengan elemen pada himpunan lain menggunakan aturan tertentu, sedemikian sehingga setiap elemen yang ada pada himpunan pertama terdapat tepat satu elemen yang ada pada himpunan kedua dan setiap

Pruduk kartesius : menunjukkan himpunan semua pasangan terurut sedemikian sehingga elemen pertama setiap pasangan adalah elemen dari himpunan pertama dan elemen kedua dari setiap pasang adalah elemen dari himpunan kedua.

Assosiatitif : pengelompokan

Distributif : penyebaran

Invers : lawan atau kebalikan

Isi : menunjuk benda-benda tiga dimensi yang padat, seperi batubata, balok kayu, dan lain-lain

Komutatif : pertukaran

Sistem pertandingan setengah kompetisi : yaitu pertandingan yang diikuti oleh semua peserta saling ketemu (bertanding) satu kali.

Sistem pertandingan kompetisi penuh: semua peserta bertemu (bertanding) dan terjadi dua kali pertandingan, yang biasanya satu kali di kandang (tempat) sendidi, dan satu lagi di kandang (tempat) lawan.

Volume : menunjuk kepada benda-benda tiga dimensi yang kosong (tidak berisi), seperti kolam/bak, dus/kotak, dan lain-lain.

Ekuivalensi logis : Pernyataan yang memuat biimplikasi dan merupakan tautologi.

Implikasi logis : Implikasi yang merupakan tautologi.

Invers : Pernyataan $\sim p \to \sim q$ jika pernyataan kondisionalnya $p \to q$

Kontingensi : pernyataan majemuk yang nilai kebenaran pernyataannya adalah kumpulan dari benar dan salah.

Kontradiksi : pernyataan majemuk yang nilai kebenaran pernyataannya adalah salah dalam segala hal.

Kontrapositif : Pernyataan $\sim q \to \sim p$ jika pernyataan kondisionalnya $p \to q$

Konvers : Pernyataan $q \to p$ jika pernyataan kondisionalnya $p \to q$

Pernyataan : kalimat matematika yang sudah jelas, sudah pasti benarnya atau salahnya dan tidak mempunyai dua arti.

Pernyataan tunggal : pernyataan yang hanya terdiri dari satu kalimat dan tidak mengandung pernyataan lain sebagai komponennya.

Pernyataan majemuk: pernyataan yang mengandung pernyataan lain sebagai komponennya.

Tautologi : pernyataan majemuk yang nilai kebenaran pernyataannya

adalah benar dalam segala hal.

Argumen : rangkaian pernyataan-pernyataan yang memuat kesimpulan.

Argumen deduktif : argumen yang berkenaan dengan inferensi deduksi.

Argumen induktif : argumen yang berkenaan dngan inferensi induksi.

Infrensi induksi : inferensi dari premis menuju konklusi yang berdasarkan atas beberapa pengamatan atau kemungkinan

Kuantor : ungkapan tentang ”Semua x”, ”Setiap x”, ”Untuk setiap x”, ”Beberapa x”, ”Ada x”, dan ”terdapat x”.

Kuantor universal / umum : ungkapan tentang “semua x” atau “setiap x” dilambangkan dengan “$\forall$ x”

Kuantor eksistensial / khusus : uangkapan tentang “beberapa x” atau “terdapat x”, atau “ada x” dinotasikan “$\exists$ ”.

Substitution instance: substitusi konstanta individual terhadap variabel individualnya dalam fungsi proposisi tersebut.

Instantiasi : proses memperoleh pernyataan dari fungsi proposisi dengan cara mensubstitusikan konstanta individual pada variabel indiviualnya.

Generalisasi : proses memperoleh pernyataan dari fungsi proposisi dengan cara mensubstitusikan variabel individual pada konstanta individualnya.

Kesamaan : Kalimat matematika tertutup (pernyataan) yang memuat tanda sama dengan (=).

Ketidaksamaan : Kalimat matematika tertutup (pernyataan) yang memuat tanda ketidaksamaan ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$, $\neq$).

Persamaan : Kalimat matematika terbuka yang memuat tanda sama dengan (=)

Persamaan linear : Persamaan yang mempunyai bentuk umum ax + b = 0 , a $\neq$ 0.

Persamaan kuadrat : Persamaan dengan pangkat tertinggi pada variabel adalah dua, bentuk umumnya ax2 + bx + c = 0, a $\neq$ 0.

Pertidaksamaan : kalimat matematika terbuka yang memuat tanda ketidaksamaan ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$, $\neq$).

Pertidaksamaan linear : pertidaksamaan yang memuat pangkat tertinggi dari variabelnya adalah satu.

Diskriminan : Bilangan yang diperoleh dari b2 – 4ac pada persamaan kuadrat

ax2 + bx + c = 0, a $\neq$ 0. dan disingkat D.

Domain (daerah asal): himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari elemen-elemen pertama dari himpunan pasangan terurut.

Ekuivalen (Relasi ekuivalen) : Suatu relasi R pada himpunan A yang memenuhi sifat reflektif, simetris, dan transitif.

Fungsi : Suatu aturan yang mengaitkan setiap elemen x dalam suatu himpunan, yang disebut daerah asal, domain, atau daerah definisi, ke sebuah nilai tunggal f(x) dari himpunan ke dua, yang disebut dengan kodomain. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (range).

Fungsi komposisi g o f: Fungsi f bekerja untuk x menghasilkan f(x), dan dilanjutkan fungsi g bekerja untuk f(x) menghasilkan g(f(x)). Fungsi yang dihasilkan ini merupakan komposit g dengan f, Jadi, (g o f)(x) = Kemiringan = Hasil bagi perubahan y oleh perubahan x. Jika suatu garis melalui titik A(x1,y1) dan B(x2,y2). Kemiringan garis itu adalah m dan didefinisikan :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$$

Range (daerah hasil): himpunan yang anggota-anggotanya terdiri dari elemen-elemen kedua dari himpunan pasangan terurut.

Relasi (R) : Himpunan bagian dari produk kartesius himpunan A ke himpunan B, ditulis ARB $\subseteq$ A X B

Reflektif : Sifat relasi R pada himpunan A jika dan hanya jika (a, a)∈ R

Simetris : Sifat suatu relasi R pada himpunan A, berlaku (a, b) ∈ R, jika dan hanya jika (b, a) ∈ R untuk setiap a, b ∈ A.

Transitif : Sifat suatu relasi R pada himpunan A, berlaku (a, b) ∈ R, dan (b, c) ∈ R jika dan hanya jika (a, c) ∈ R untuk setiap a, b, c ∈ A.

DAFTAR PUSTAKA

Billstein, Liberskind, dan Lot (1993), *A Problem Solving Approach to Mathematics for School Teachers,* Addison-Wesley, New York

Hudoyo, Herman dan Akbar Sutawidjaya. (1996/1997). *Matematika*. Depdikbud, Dirjen Dikti.

Kusumah, Yaya S (1986) *Logika Matematika Elementer*, Tarsito, Bandung.

Purcell, E.J dan Verberg, D (Terjemahan I Nyoman Susila, Bana Kartasasmita, dan Rawuh) (1999), *Kalkulus dan Geometri Analitis,* Erlangga, Jakarta

Spiegel, Murray R. (Terjemahan: Kasir Iskandar). (1989). *Seri Buku SchaumTeori dan Soal-Soal: Matematika Dasar.* Erlangga Jakarta.

Spiegel, Murray R. (Terjemahan: Kasir Iskandar). (1989). *Seri Buku SchaumTeori dan Soal-Soal: Matematika Dasar.* Penerbit Erlangga Jakarta.

Sukirman, Dkk. (2005). *Matematika.* Universitas Terbuka Jakarta.

Wheeler, Ruric E. (1992). *Modern Mathematics*. Belmont, CA: Wadsworth.